

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Escola de Engenharia de São Carlos

**Análise numérica de interação fluido-estrutura com escoamentos multifásicos: uma abordagem monolítica em descrição Lagrangiana**

**Thiago Rodrigues Carvalho**

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

**Thiago Rodrigues Carvalho**

**Análise numérica de interação fluido-estrutura com escoamentos multifásicos: uma abordagem monolítica em descrição Lagrangiana**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanchez

**VERSÃO CORRIGIDA**

**São Carlos**

**2025**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

C331a Carvalho, Thiago Rodrigues  
Análise numérica de interação fluido-estrutura com escoamentos multifásicos: uma abordagem monolítica em descrição Lagrangiana / Thiago Rodrigues Carvalho; orientador Rodolfo André Kuche Sanches. São Carlos, 2025.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2025.

1. Dinâmica não linear geométrica. 2. MEF posicional. 3. PFEM. 4. Escoamentos de superfície livre. 5. IFE. 6. Acoplamento monolítico. 7. Escoamentos multifásicos. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **THIAGO RODRIGUES CARVALHO**.

Título da dissertação: "Análise numérica de interação fluido-estrutura com escoamentos multifásicos: uma abordagem monolítica em descrição Lagrangiana".

Data da defesa: 29/04/2025.

### Comissão Julgadora

**Prof. Associado Rodolfo André Kuche Sanches**  
(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

**Prof. Associado Fabrício Simeoni Sousa**

(Instituto de Ciências Matemática e de Computação/ICMC-USP)

**Prof. Dr. Frederico Martins Alves da Silva**

(Universidade Federal de Goiás /UFG)

### Resultado

APROVADO

Aprovado

APROVADO

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Claudilene Carmen Rodrigues Carvalho e Ronaldo Alves de Carvalho pelo apoio e sem os quais não seria possível chegar até aqui. Aos meus avós, Maria Camilo Braga e Adão Rodrigues Braga, pelos ensinamentos morais e pela visão de mundo. Ao meu irmão, Matheus Rodrigues Carvalho, que está sempre presente em momentos de dificuldade para dar apoio e agradeço à Júlia Viana Cordeiro, pelo companheirismo, orientação e presença constante tanto nos bons quanto nos maus momentos.

Ao professor Dr. Rodolfo André Kuche Sanches, por sempre me incentivar a fazer o melhor possível e pelo conhecimento transmitido em todas aulas, conversas e reuniões de orientação. Agradeço também pelo apoio na escrita e orientação de projetos, artigos e na preparação para a defesa de Mestrado.

Aos professores do SET/USP, em especial ao professor Dr. Humberto Breves Coda pelos ensinamentos em dinâmica não linear e pela orientação em diversos momentos; e ao professor Dr. Rodolfo A. K. Sanches pela introdução em mecânica dos fluidos computacional e em programação de alto desempenho. Agradeço ao professor Ricardo Carrazedo pelo auxílio com procedimentos burocráticos da academia. Aos membros da banca, prof. Dr. Fabricio S. de Sousa e prof. Dr. Frederico M. A. da Silva, pelo tempo dedicado à revisão e análise da Dissertação. Aos professores Dr. Humberto B. Coda e Dr. Rubens A. A. Junior pelas contribuições na banca de qualificação. Também agradeço ao Dr. Dorival P. Neto pelos ensinamentos em computação.

Aos amigos e colegas pela companhia nesta jornada, especialmente Gabriel N. Queiroz, Mário S. Filho e Kenzo pela amizade formada na ME03. Aos membros do grupo de pesquisa pelos ensinamentos em mecânica computacional, Luiz Fernando, Matheus Yokomizo, Giovane Avancini, Darcy, Wesley e Jeferson. Aos demais colegas e amigos do SET, Daniel, Matheus Rocha, André, Fernando, Diego, Yuiti, Wanderson e Péricles.

À USP, em especial ao SET, pela infraestrutura fornecida para a realização deste trabalho, assim como ao ICMC pela utilização do *cluster* Euler. Por fim, agradeço à Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa concedida para o desenvolvimento desta pesquisa.



*“Nullius in verba.”*

*(Carta Magna da Royal Society of London, 1662)*



# Resumo

CARVALHO, T. R. **Análise numérica de interação fluido-estrutura com escoamentos multifásicos: uma abordagem monolítica em descrição Lagrangiana.** 2025. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

Os escoamentos multifásicos, onde diferentes fluidos imiscíveis escoam em conjunto, estão presentes em diversas situações na engenharia ou na natureza. A simulação computacional desses problemas apresenta diversos desafios, sendo o principal deles, a mudança topológica que pode ocorrer nos domínios dos fluidos envolvidos. O desafio torna-se ainda maior quando envolve interação com estruturas flexíveis. Nesse caso há que se considerar o problema de contato e interação entre os diferentes fluidos; bem como entre os fluidos e os sólidos. Nesse sentido, este trabalho trata do desenvolvimento de uma metodologia para a análise de escoamentos multifásicos incompressíveis interagindo com sólidos elásticos. Para a simulação do escoamento multifásico adota-se uma formulação do Método dos Elementos Finitos e Partículas (PFEM) baseada nas posições das partículas, enquanto para os sólidos elásticos, adota-se uma formulação do Método dos Elementos Finitos em descrição lagrangiana total, baseada em posições, para análises dinâmicas de sólidos com grandes deslocamentos. Assim, tanto o fluido quanto o sólido possuem as posições como variáveis nodais, conseqüentemente o acoplamento monolítico entre os dois torna-se direto. O PFEM é escolhido por ser reconhecidamente eficiente em tratar problemas com mudanças topológicas. Nesse contexto, desenvolve-se uma metodologia para a simulação de escoamentos multifásicos no PFEM, que envolve identificar, na etapa de pré-processamento as partículas que definem o domínio de cada fluido, e ao longo do processo de solução, durante as etapas constantes de reconstrução da malha, as partículas são realocadas por meio de uma abordagem multidomínio, preservando a consistência material do escoamento multifásico. Para tornar a ferramenta desenvolvida mais geral, desenvolvem-se técnicas para a consideração de condições de contorno de domínios abertos, como contornos de entrada, de saída e de deslizamento espacialmente fixos. A metodologia proposta é testada por meio de exemplos numéricos, mostrando-se precisa e versátil com potencial para aplicações em casos onde há interação líquido-ar-estrutura, como *sloshing* em reservatórios, simulação de ruptura de barragens em estruturas flexíveis e captura de fenômenos complexos multiacoplados como a formação de bolsão de ar na análise de Interação Fluido-Estrutura (IFE) multifásica.

**Palavras-chave:** Dinâmica não linear geométrica. MEF posicional. PFEM. Escoamentos de superfície livre. IFE. Acoplamento monolítico. Escoamentos multifásicos.



# Abstract

CARVALHO, T. R. **Numerical analysis of fluid-structure interaction with multiphase flows: a monolithic approach in Lagrangian description.** 2025. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

Multiphase flows, where different immiscible fluids flow together, are present in various engineering and natural situations. The computational simulation of these problems presents several challenges, the main one being the topological changes that may occur in the domains of the involved fluids. The challenge becomes even greater when it involves interaction with flexible structures. In this case, the contact and interaction problem between the different fluids, as well as between the fluids and the solids, must be considered. In this sense, this work deals with the development of a methodology for the analysis of incompressible multiphase flows interacting with elastic solids. For the simulation of multiphase flow, a Particle Finite Element Method (PFEM) formulation based on particle positions is adopted, while for elastic solids, a Total Lagrangian Finite Element Method formulation, also position-based, is used for dynamic analyses of solids with large displacements. Thus, both the fluid and the solid have positions as nodal variables, making monolithic coupling between the two straightforward. The PFEM is chosen because it is widely recognized as efficient in handling problems with topological changes. In this context, a methodology is developed for simulating multiphase flows in the PFEM, which involves identifying, in the pre-processing stage, the particles that define the domain of each fluid. Throughout the solution process, during the constant mesh reconstruction steps, the particles are relocated using a multi-domain approach, preserving the material consistency of the multiphase flow. To make the developed tool more general, techniques are developed to account for open-domain boundary conditions, such as spatially fixed inlet, outlet, and slip boundaries. The proposed methodology is tested through numerical examples, proving to be accurate and versatile, with potential applications in cases where there is liquid-air-structure interaction, such as sloshing in tanks, dam-break simulations in flexible structures, and the capture of complex multi-coupled phenomena like air pocket formation in multiphase Fluid-Structure Interaction (FSI) analysis.

**Keywords:** Geometric nonlinear dynamics. Positional FEM. PFEM. Free surface flows. FSI. Monolithic coupling. Multiphase flows.



# Lista de figuras

1	Configurações de referência: inicial, última configuração equilibrada e atual.	44
2	Mudança de configuração: transformação do domínio inicial para o atual. . .	45
3	Tensor de tensões de Cauchy: medida na configuração deformada. . . . .	47
4	Cinemática de um elemento finito. . . . .	55
5	Elemento rígido para acoplamento de mola de torção com MEF posicional. .	65
6	Chapa com furo: análise pelo MEF Posicional. . . . .	67
7	Chapa com furo: resultados para o campo de deslocamentos. . . . .	67
8	Arco: geometria e forças de superfície. . . . .	68
9	Arco: resultados para o campo de deslocamentos. . . . .	68
10	EPT com mola de giro: geometria e dados. . . . .	69
11	EPT com mola de giro: verificação do deslocamento vertical no ponto A com analítico. . . . .	70
12	Viga em balanço: geometria e carregamento. . . . .	70
13	Viga em balanço: resultado não linear e transiente. . . . .	71
14	Viga com amortecimento viscoso: geometria e carregamento. . . . .	72
15	Viga com amortecimento viscoso: resultado transiente com amortecimento. .	72
16	Mudança de configuração: transformação do domínio $\Omega_n$ para o atual. . . .	74
17	Mudança de configuração: descrição lagrangiana parcialmente atualizada. .	82
18	Passos do Método dos Elementos Finitos e Partículas baseado em posição. .	97
19	Triangulação de Delaunay e diagrama de Voronoi. . . . .	99
20	Técnica Alpha-Shape para a detecção da superfície livre. . . . .	100
21	Definição do contorno e detecção de contato com a técnica $\alpha shape$ . . . . .	102
22	Simulação do escoamento em uma tubulação em descrição lagrangiana. . .	104
23	Técnica de remalhamento no PFEM proposta: realocação de partículas para simular entrada e saída de materiais. . . . .	105
24	Paredes lisas no PFEM: vazamento artificial impróprio pelo $\alpha shape$ . . . .	106
25	Técnica proposta para análise de paredes lisas com PFEM: realocação das partículas fantasmas. . . . .	106
26	Tubo com superfície livre: geometria, condições de contorno e dados do problema. . . . .	112
27	Tubo com superfície livre: componente vertical de velocidade sobre a confi- guração deformada. . . . .	113
28	Tubo com superfície livre: perfil de velocidade. . . . .	113
29	Tubo com escoamento condições de entrada e saída: geometria e dados do problema. . . . .	114
30	Tubo com escoamento condições de entrada e saída: discretização inicial. . .	114

31	Tubo com escoamento condições de entrada e saída: velocidade vertical no regime permanente. . . . .	115
32	Paredes lisas e superfície livre: modelo, propriedades e malha. . . . .	116
33	Campos de velocidade, aceleração e pressão em um escoamento com parede lisa fixa. . . . .	116
34	Análise numérica da implementação em relação a previsões analíticas. . . .	117
35	Escoamento de Couette: geometria, condições de contorno e malha. . . . .	118
36	Escoamento de Couette: componente horizontal de velocidade $v_x$ . . . . .	118
37	Escoamento de Couette: comparação do perfil de velocidades numérico $v_x$ com a solução analítica. . . . .	119
38	Escoamento de Couette 3D: geometria e condições de contorno. . . . .	120
39	Escoamento de Couette 3D: malha de elementos tetraédricos de aproximação linear. . . . .	120
40	Escoamento de Couette 3D: componente horizontal de velocidade $v_x$ . . . . .	121
41	Cavidade quadrada: geometria, condições de contorno e propriedades. . . .	121
42	Cavidade quadrada: análise do remalhamento no PFEM. . . . .	122
43	Cavidade quadrada: campo de velocidades. . . . .	123
44	Cavidade quadrada: comparação com resultados de Ghia <i>et al.</i> (1982). . . .	124
45	Escoamento ao redor de um cilindro: geometria, condições de contorno e malha. . . . .	124
46	Escoamento ao redor de um cilindro: desenvolvimento do remalhamento. . .	125
47	Escoamento ao redor de um cilindro: campo da norma da velocidade $  \mathbf{v}  $ . .	126
48	Análise da componente vertical de velocidade $v_y$ no ponto (15m, 8m). . . .	126
49	Partículas fantasmas em escoamentos multifásicos: atribuição dinâmica das características do fluido. . . . .	129
50	Remalhamento tradicional do PFEM aplicado a escoamentos multifásicos: realocação de partículas imprópria. . . . .	129
51	Técnica de remalhamento para escoamentos multifásicos com PFEM. . . . .	130
52	Escoamentos de superfície livre pelo PFEM sem utilizar o $\alpha$ -shape. . . . .	130
53	Estático bifásico: geometria e propriedades. . . . .	137
54	Estático bifásico: malha de elementos finitos triangulares. . . . .	137
55	Estático bifásico: campo de pressão para um modelo de duas camadas de fluidos. . . . .	138
56	Estático bifásico: perfis de pressão numérico e analítico. . . . .	138
57	Modelo estático com 5 camadas de fluidos com diferentes materiais. . . . .	139
58	Estático multifásico: malha de elementos finitos triangulares. . . . .	139
59	Estático multifásico: campo de pressão para um modelo com múltiplas camadas de fluidos. . . . .	140
60	Estático multifásico: análise de convergência da pressão. . . . .	140

61	Decantação bifásica: condição inicial e características físicas. . . . .	141
62	Decantação bifásica: malha de elementos finitos triangulares. . . . .	142
63	Decantação bifásica: caminho de solução da dinâmica de fluidos bifásica com múltiplas interfaces. . . . .	142
64	Decantação bifásica: campo de pressão para o instante $t = 40, 75$ s. . . . .	143
65	Decantação multifásica: geometria e propriedades físicas. . . . .	143
66	Decantação multifásica: discretização inicial com elementos finitos triangulares.	144
67	Decantação multifásica: caminho de solução da dinâmica de fluidos multifásica com múltiplas interfaces. . . . .	145
68	Decantação multifásica: distribuição de pressão em diferentes instantes. . .	145
69	Decantação multifásica: campo de velocidades verticais ao longo do tempo.	146
70	Rompimento de barragem: modelo para a análise do rompimento de uma barragem de água, considerando a presença do ar. . . . .	146
71	Rompimento de barragem: discretização inicial com elementos finitos triangulares. . . . .	147
72	Rompimento de barragem: configuração do rompimento da barragem de água ao longo do tempo considerando o ar. . . . .	148
73	Rompimento de barragem: validação com resultados experimentais da ruptura da barragem de água. . . . .	148
74	Rompimento de barragem com impacto: geometria, malha e propriedades gerais. . . . .	150
75	Rompimento de barragem com impacto: captura da formação do bolsão de ar. As figuras denotam o experimental de Koshizuka <i>et al.</i> (1995), PFEM posicional monofásico de Avancini (2018), PFEM tradicional de Idelsohn <i>et al.</i> (2014) e abordagem proposta, respectivamente. . . . .	153
76	<i>Sloshing</i> de um fluido viscoso: geometria e propriedades. . . . .	154
77	<i>Sloshing</i> de um fluido viscoso: análise do remalhamento. . . . .	154
78	<i>Sloshing</i> de um fluido viscoso: análise da interface fluido-ar (comparando com caso aderente de Avancini (2023)). . . . .	155
79	<i>Sloshing</i> de um fluido viscoso: análise do campo de pressão (comparando com caso aderente de Avancini (2023)). . . . .	156
80	<i>Sloshing</i> de um fluido viscoso: análise da interface fluido-ar (comparando com caso de paredes lisas de Franci (2016)). . . . .	157
81	<i>Sloshing</i> de um fluido viscoso: análise do campo de pressão (comparando com caso de paredes lisas de Franci (2016)). . . . .	158
82	Contato fluido-estrutura com PFEM: detecção das partículas de interface. . .	161
83	Interação Fluido-Estrutura com escoamentos multifásicos no PFEM. . . . .	163
84	Reservatório bifásico com parede flexível em pequenos deslocamentos: modelo numérico com geometria, condições de contorno e malha. . . . .	169

85	Reservatório bifásico com parede flexível em pequenos deslocamentos: campo de deslocamentos horizontais no sólido $u_x$ . . . . .	169
86	Reservatório bifásico com parede flexível em pequenos deslocamentos: campo de pressão no fluido e campo de tensão na estrutura para o instante $t = 1, 0$ s. . . . .	170
87	Reservatório bifásico com parede flexível em pequenos deslocamentos: Deslocamento horizontal da face superior da viga, no ponto central, ao longo do tempo. . . . .	170
88	Reservatório bifásico flexível com formação de onda: modelo numérico com geometria, condições de contorno e malha. . . . .	171
89	Reservatório bifásico flexível com formação de onda: análise das interfaces fluido-fluido e fluido-estrutura ao longo do tempo. . . . .	172
90	Reservatório bifásico flexível com formação de onda: distribuição de pressão no fluido e componente vertical de tensão normal na estrutura. . . . .	173
91	IFE bifásica com mudança topológica: modelo numérico com geometria, condições de contorno e malha. . . . .	174
92	Ruptura de barragem sobre anteparo elástico: comparação com Cerquagliaa <i>et al.</i> (2019) (monofásico PFEM clássico). . . . .	176
93	Ruptura de barragem sobre anteparo elástico: comparação com Walhorn <i>et al.</i> (2005) (MEF espaço-tempo e <i>level-set</i> ). . . . .	177

# Lista de tabelas

1	Escoamento de Couette: distribuição temporal dos processos de simulação .	119
---	---	-----



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>23</b>
1.1	Breve estado da arte	25
1.1.1	Dinâmica dos sólidos computacional	26
1.1.2	Dinâmica dos fluidos computacional	28
1.1.2.1	Estabilidade numérica do campo de pressão	32
1.1.2.2	Escoamentos multifásicos	33
1.1.3	Interação fluido-estrutura computacional	35
1.2	Objetivos	38
1.2.1	Objetivos específicos	38
1.3	Justificativa	39
1.4	Metodologia	40
1.4.1	Organização do texto	41
<b>2</b>	<b>Mecânica dos sólidos</b>	<b>43</b>
2.1	Cinemática	43
2.1.1	Mudança de configuração	43
2.1.2	Medida de deformação	46
2.2	Equações governantes da mecânica dos sólidos	46
2.2.1	Medidas de tensão	46
2.2.2	Conservação da massa	48
2.2.3	Equação do movimento de Cauchy-Euler	48
2.3	Modelo constitutivo	50
2.3.1	Saint-Venant-Kirchhoff para sólidos tridimensionais	50
2.3.2	Estado plano de deformação	51
2.3.3	Estado plano de tensão	51
<b>3</b>	<b>Método dos elementos finitos para sólidos com grandes deslocamentos</b>	<b>53</b>
3.1	Discretização espacial por elementos finitos	53
3.1.1	Mudança de configuração	54
3.1.2	Deformação de Green-Lagrange	56
3.2	Equações governantes no problema discreto	56
3.2.1	Energia mecânica	56
3.2.2	Equilíbrio	57
3.3	Integração numérica	58
3.3.1	Integração numérica no espaço	59
3.3.2	Integração numérica temporal	59
3.4	Técnica de solução numérica do sistema não linear	61
3.4.1	Processo de Newton-Raphson e resíduo numérico	62

3.4.2	Matriz tangente . . . . .	63
3.5	Condições de contorno e valores iniciais . . . . .	63
3.5.1	Condições de contorno . . . . .	64
3.5.2	Condições iniciais . . . . .	64
3.5.3	Mola de torção para problemas bidimensionais . . . . .	64
3.6	Exemplos de verificação . . . . .	66
3.6.1	Chapa com furo sob carregamento estático . . . . .	67
3.6.2	Arco com força distribuída estática . . . . .	68
3.6.3	Viga com mola de torção . . . . .	69
3.6.4	Viga em balanço com grandes deslocamentos e carregamento dinâmico . . . . .	70
3.6.5	Viga com amortecimento viscoso . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Mecânica dos fluidos . . . . .</b>	<b>73</b>
4.1	Cinemática . . . . .	73
4.1.1	Medida de deformação . . . . .	75
4.2	Equações governantes . . . . .	76
4.2.1	Conservação da massa . . . . .	76
4.2.2	Equação de quantidade de movimento . . . . .	76
4.3	Modelo constitutivo newtoniano incompressível . . . . .	77
4.3.1	Relação tensão-deformação . . . . .	78
4.3.2	Energia de deformação específica . . . . .	78
4.3.3	Tensões de Piola-Kirchhoff . . . . .	79
4.3.4	Tensor constitutivo de quarta ordem . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Método dos elementos finitos em descrição lagrangiana parcialmente atualizada aplicado a fluidos . . . . .</b>	<b>81</b>
5.1	Discretização do domínio . . . . .	82
5.2	Forma discreta das equações governantes para escoamentos incompressíveis . . . . .	84
5.2.1	Energia mecânica . . . . .	84
5.2.2	Equações de conservação pela abordagem variacional . . . . .	85
5.2.3	Estabilização da pressão . . . . .	86
5.2.4	Forças nodais equivalentes . . . . .	87
5.3	Integração numérica . . . . .	88
5.3.1	Integração numérica no espaço . . . . .	88
5.3.2	Integração numérica temporal . . . . .	88
5.4	Solução numérica do sistema não linear . . . . .	90
5.4.1	Resíduo numérico . . . . .	90
5.4.2	Matriz tangente . . . . .	91
5.5	Condições de contorno e iniciais . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Método dos Elementos Finitos e Partículas aplicado a fluidos . . . . .</b>	<b>95</b>
6.1	Estrutura do PFEM . . . . .	96

6.1.1	Remalhamento . . . . .	98
6.1.2	Definição dos contornos . . . . .	100
6.1.3	Controle de qualidade da malha . . . . .	101
6.2	Condições de contorno especiais no contexto lagrangiano do PFEM . . . . .	102
6.2.1	Escoamentos com fluxos de entrada e saída . . . . .	103
6.2.2	Contorno fixo com condição de Neumann . . . . .	104
6.2.3	Paredes lisas . . . . .	105
6.3	Implementação computacional . . . . .	106
6.4	Exemplos de verificação . . . . .	111
6.4.1	Escoamento em um tubo com superfície livre e contorno de saída . . . . .	111
6.4.2	Escoamento em um tubo com contornos de entrada e de saída . . . . .	112
6.4.3	Escoamento com paredes lisas e superfície livre . . . . .	115
6.4.4	Escoamento de Couette . . . . .	117
6.4.5	Cavidade quadrada . . . . .	120
6.4.6	Escoamento sobre cilindro com desprendimento de vórtices . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Escoamentos multifásicos com mudanças topológicas . . . . .</b>	<b>127</b>
7.1	Atribuição das propriedades físicas às partículas fantasmas . . . . .	128
7.2	Realocação de partículas em escoamentos multifásicos . . . . .	129
7.3	Implementação computacional . . . . .	130
7.4	Exemplos de verificação e validação . . . . .	136
7.4.1	Coluna de fluidos: análise estática para verificação da pressão . . . . .	137
7.4.2	Decantação bifásica com superfície livre . . . . .	140
7.4.3	Decantação multifásica com superfície livre . . . . .	142
7.4.4	Rompimento de barragem de água considerando a presença do ar . . . . .	145
7.4.5	Rompimento de barragem sobre obstáculo rígido considerando a presença do ar . . . . .	149
7.4.6	<i>Sloshing</i> de um fluido viscoso considerando o ar . . . . .	151
<b>8</b>	<b>Interação Fluido-Estrutura . . . . .</b>	<b>159</b>
8.1	Acoplamento monolítico fluido-estrutura . . . . .	160
8.1.1	Contato fluido-estrutura . . . . .	160
8.1.2	Solução do problema acoplado . . . . .	162
8.2	Escoamentos multifásicos na IFE . . . . .	162
8.3	Implementação computacional . . . . .	164
8.4	Exemplos de verificação . . . . .	168
8.4.1	Reservatório com parede flexível: bifásico e pequenos deslocamentos . . . . .	168
8.4.2	Reservatório com parede flexível: bifásico com formação de onda . . . . .	170
8.4.3	Ruptura de barragem sobre anteparo elástico considerando interação água-ar . . . . .	172
<b>9</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>179</b>

9.1 Desenvolvimentos futuros . . . . . 181

**Referências . . . . . 183**

# Capítulo 1

## Introdução

No âmbito da Interação Fluido-Estrutura, são poucos os casos em que se pode encontrar uma solução analítica, sendo a maioria de casos estáticos ou em regime permanente, considerando ainda diversas aproximações. Além disso, tais soluções analíticas tendem a se restringir a um conjunto limitado de geometrias e condições de contorno. Nesse sentido, o desenvolvimento de formulações numéricas permite que a engenharia avance na análise de problemas fisicamente e geometricamente complexos.

Com o uso de ferramentas computacionais tem sido possível obter previsões cada vez mais realísticas de fenômenos de interação fluido-estrutura (IFE), tais como interação de estruturas de pontes com escoamentos do ar ou da água; plataformas de petróleo *off-shore* submetidas a ações de ondas; edifícios altos sujeitos ao vento; bem como outras aplicações na aviação, na navegação e na biomecânica.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) trata-se da principal ferramenta utilizada no contexto da dinâmica não linear de sólidos deformáveis, sendo reconhecidamente eficiente e estável para análises numéricas de estruturas em geral. Por outro lado, no âmbito da dinâmica de fluidos computacional, há muitas frentes de pesquisas, sendo possível destacar os Métodos das Diferenças Finitas (MDF), dos Volumes Finitos (MVF), e dos Elementos Finitos (MEF), que conta com grande volume de trabalhos nas últimas décadas.

Na formulação do MEF para sólidos, geralmente trabalha-se com uma descrição lagrangiana, mantendo-se o domínio material como referência, enquanto ao se tratar de fluidos, utiliza-se comumente uma abordagem euleriana, mantendo-se o domínio espacial como referência, permitindo ao fluido escoar, podendo deformar-se indefinidamente, em uma malha de elementos finitos fixa.

Embora a abordagem euleriana seja adequada a uma grande variedade de problemas da mecânica dos fluidos, ela não pode ser diretamente aplicada aos problemas em que o domínio de interesse do fluido apresenta contornos móveis, tal como nos problemas de interação fluido-estrutura, escoamentos de superfície livre ou escoamentos multifásicos. Para tratar desses

problemas, surgem os métodos de malhas móveis, baseados na descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) (Donea *et al.*, 1982; Fernandes *et al.*, 2019; Yokomizo, 2024) ou no MEF espaço-tempo (Hubner *et al.*, 2004; Walhorn *et al.*, 2005). Esses métodos são reconhecidamente robustos, no entanto, não podem ser diretamente aplicados para problemas com mudanças topológicas, ou mesmo grandes distorções do domínio do fluido, que podem surgir em decorrência da movimentação das interfaces móveis, demandando técnicas de reconstrução da malha robustas e computacionalmente custosas.

Apesar de diversos estudos já terem sido realizados no sentido de simular problemas de escoamentos com mudanças topológicas, não há ainda um consenso sobre qual seria a técnica mais adequada para isso. Uma das alternativas é o emprego de métodos de malha fixa, baseados na descrição euleriana com a introdução de técnicas de contorno imerso, ou de captura de interface, que permitem aos contornos móveis (superfícies livres, interface fluido-estrutura ou interfaces fluido-fluido) moverem-se imersos na malha fixa. Embora esses métodos sejam robustos para considerar os problemas com mudanças topológicas, eles apresentam dificuldades para se manter uma discretização com refinamento adaptativo adequado próximo ao contorno da estrutura, com a finalidade de se capturar os efeitos localizados de camada limite, além de apresentarem desafios adicionais relacionados à identificação dinâmica do contorno da estrutura na malha do fluido e da imposição das condições de acoplamento ou de contorno imersas.

Outra alternativa para escoamentos com mudanças topológicas são os métodos baseados em partículas, tais como o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) (Gingold; Monaghan, 1977) e o *Moving Particle Semi-Implicit* (MPS) (Koshizuka; Oka, 1996). Esses métodos partem de uma descrição lagrangiana e tratam o fluido como um conjunto de partículas que interagem de acordo com modelos numéricos específicos que visam representar a mecânica de meio contínuo.

Mais recentemente foi desenvolvido o Método dos Elementos Finitos e Partículas (PFEM), onde o fluido também é representado por uma nuvem de partículas que carregam as propriedades do escoamento, no entanto, uma malha de elementos finitos é construída sobre essa nuvem de modo a resolver a equação do movimento. Essa malha é reconstruída constantemente de modo a permitir a representação de grandes distorções e de mudanças topológicas. Isso permite a união da versatilidade dos métodos de partículas com as facilidades do MEF quanto à discretização e à aplicação de condições de contorno.

No grupo de pesquisa em que se insere este trabalho, foi desenvolvida uma formulação do MEF em descrição lagrangiana total e baseada em posições para escoamentos incompressíveis de superfície livre com distorções finitas, conforme apresentado em Avancini e Sanches (2020). A formulação tradicional do PFEM emprega velocidades das partículas como variáveis principais, no entanto, ao se tratar de partículas, faz sentido considerar a posição de cada ponto material como variável principal. Assim, a formulação baseada em posições foi adaptada e aplicada ao PFEM para escoamentos bi e tridimensionais e acoplada a sólidos, como mostram os trabalhos de Avancini (2018), Avancini (2023), Avancini *et al.* (2024) e Moreira (2021), resultando numa

alternativa robusta para escoamentos de superfície livre e problemas de IFE com mudanças topológicas. Isso resultou em uma formulação mais compacta de ser descrita do que formulações baseadas em deslocamentos, e ainda, permite o acoplamento monolítico com a estrutura de forma direta ao considerar os mesmos parâmetros nodais.

A formulação incompressível do PFEM é adequada para a simulação de diversos problemas da engenharia: escoamentos em regiões como canais, pontes, barragens, aerofólios e outras estruturas civis que não provoquem explosões ou reações químicas em sua interação com o fluido. Nesse contexto, a descrição incompressível torna-se uma boa escolha para a modelagem do fluido em tais problemas de engenharia. Ferziger e Perić (1999) apontam ainda que trabalhando com valores menores que 0,3 para o número de Mach o fluido pode ser considerado incompressível.

Dada a recente introdução da formulação baseada em posições no PFEM, ainda há diversos desafios para que sua aplicação à IFE se torne mais ampla. Dentre os problemas onde essa formulação pode ser aplicada de forma vantajosa, estão os escoamentos multifásicos, onde pode haver mistura e separação entre diferentes fluidos ao longo do escoamento. Assim, este trabalho desenvolve e implementa, no contexto da formulação posicional do PFEM, um modelo para consideração de escoamentos multifásicos, além de técnicas para a aplicação de condições de contorno de paredes lisas e condições de contorno de entrada e de saída que permitam a consideração de um domínio computacional com fluxo constante de partículas entrando e saindo.

Como pode ser visto em detalhes na sequência deste texto, com a extensão da formulação para considerar escoamentos multifásicos, torna-se possível, além de simular problemas clássicos com múltiplos fluidos, a consideração da interação líquido/ar, levando a uma simulação mais realista de efeitos como *sloshing* e impacto de volumes de fluido sobre estruturas. Além disso, as técnicas desenvolvidas para consideração de contornos de entrada e saída espacialmente fixos permite a aplicação a problemas de IFE com escoamentos abertos ou em canais onde haja fluxo contínuo, ao mesmo tempo em que a técnica para condição de parede com deslizamento facilita a simulação de problemas onde a camada limite é desprezível.

## 1.1 Breve estado da arte

Nesta sessão apresenta-se uma síntese do estado da arte referente às três áreas de estudo envolvidas nesta proposta: a mecânica dos sólidos computacional, com foco na análise dinâmica não linear; a mecânica dos fluidos computacional, com ênfase na análise numérica de escoamentos newtonianos incompressíveis com contornos móveis; e a interação fluido-estrutura.

### 1.1.1 Dinâmica dos sólidos computacional

No âmbito das soluções numéricas da mecânica dos sólidos, há diversos métodos de aproximação do meio sólido contínuo visando reduzir as variáveis a um número finito, sendo o Método dos Elementos Finitos (MEF) o mais difundido na área de mecânica dos sólidos deformáveis. Nesse método, os campos contínuos de interesse são substituídos por campos aproximados, representados em um conjunto de subdomínios denominados elementos finitos. Nos subdomínios, as variáveis são aproximadas tradicionalmente por meio da interpolação de valores em pontos determinados, fazendo com que um problema com infinitas incógnitas, ou seja, contínuo, seja transformado em um problema com número finito de incógnitas (Coda, 2018).

No contexto da não linearidade de um modelo estrutural, observa-se que essa pode ocorrer por fatores de natureza geométrica ou física. A análise não linear geométrica de sólidos, refere-se à formulação geometricamente exata, no sentido de não linearizar termos da cinemática do modelo estrutural. Dessa forma, torna-se possível a análise de estruturas onde não se pode aproximar a configuração atual de equilíbrio pela configuração inicial, tal como em estruturas com grandes deslocamentos e rotações. Para maiores detalhes acerca da não linearidade geométrica, sugere-se consultar Coda (2018), Crisfield (1996), Holzapfel (2000) e Ogden (1997).

Na segunda metade do século XX, os avanços tecnológicos e computacionais impulsionaram a utilização do MEF, consolidando-o como a principal ferramenta computacional para análises estruturais e impulsionando sua aplicação para a análise de problemas com grandes deslocamentos, onde destacam-se as contribuições de Argyris (1965), Bathe e Dvorkin (1983), Brendel e Ramm (1980), Crisfield (1983) e Hughes e Liu (1981).

A cinemática de alguns tipos de elementos estruturais, como vigas, placas e cascas, induz à utilização de deslocamentos e rotações como parâmetros nodais. Nesse contexto, surgiram as formulações corrotacionais, amplamente difundidas (Argyris *et al.*, 1978; Crisfield, 1990; Felippa; Haugen, 2005; Pimenta *et al.*, 2008; Pimenta; Campello, 2009; Simo; Fox, 1989). A ideia fundamental dessas formulações é decompor o movimento do sólido em uma parcela referente aos movimentos de corpo rígido e outra relativa às deformações. Entretanto, em regime de grandes deslocamentos, não se pode aplicar a propriedade de comutatividade às rotações, e assim, é necessário o emprego de técnicas adicionais como a fórmula de Euler-Rodrigues, como visto em Betsch *et al.* (1998), Campello *et al.* (2003) e Pimenta *et al.* (2004).

Como alternativa Coda (2003), inspirado pelos desenvolvimentos de Bonet *et al.* (2000), propõe uma formulação lagrangiana total alternativa do MEF em que as posições nodais, e em casos de algumas cinemáticas, vetores generalizados, são adotados como variáveis principais no lugar dos deslocamentos e rotações. Esse processo contempla naturalmente a não linearidade geométrica dada a forma como o sólido é mapeado e dispensa aproximações por rotações finitas, algo bastante pertinente ao tipo de análise.

A partir dessa concepção, diversos trabalhos têm empregado essa formulação na simula-

ção de problemas bidimensionais e tridimensionais, com elementos reticulados, planos, sólidos e de casca, como atestam os trabalhos de Coda e Paccola (2009), Greco (2004), Greco *et al.* (2006), Maciel e Coda (2005), Maciel (2008) e Siqueira e Coda (2017). Em problemas que envolvem IFE, alguns exemplos de aplicações bem-sucedidas da formulação posicional podem ser vistos em Avancini (2018), Avancini e Sanches (2020), Fernandes *et al.* (2019), Sanches e Coda (2013), Sanches e Coda (2014).

A formulação posicional do MEF também tem sido aplicada a problemas fisicamente não lineares com grandes deformações, como no trabalho de Pascon (2008), onde são apresentadas formulações hiperelásticas para elementos de cascas, com validação experimental para a análise de polímeros altamente deformáveis.

Em Carvalho (2019) apresenta-se uma formulação bidimensional para sólidos, considerando não linearidades físicas, como o comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato. Em Rosa (2021) ocorre uma ampliação do escopo da formulação posicional para a análise isogeométrica e o desenvolvimento de uma técnica de partição de domínio para análise de propagação de fraturas em sólidos bidimensionais com grandes deslocamentos. Outros modelos constitutivos não lineares podem ser encontrados em Carvalho *et al.* (2020), Carvalho *et al.* (2023), Pascon (2012) e Paccola (2004).

Considerando-se os efeitos dependentes do tempo, a mecânica dos sólidos consiste em um problema misto de condições de contorno e de valores iniciais. A análise dinâmica de estruturas pode ser feita por meio da decomposição modal, como apresentado em detalhes em diversos livros-texto tais como Paultre (2013) e Warburton (1976) onde o movimento da estrutura é decomposto em diferentes modos (autovetores) que possuem determinada frequência de vibração (autovalores), de forma que, através da combinação linear de cada modo, é possível descrever a história de vibração da estrutura. Essa forma de análise, no entanto, não pode ser diretamente aplicada a problemas não lineares.

Outra forma consiste em utilizar técnicas numéricas para integrar as equações no tempo de forma direta, o que pode ser feito por meio de métodos de marcha no tempo, dentre os quais se destaca o método de Newmark- $\beta$  (Coda, 2018), que pode alcançar precisão de segunda ordem e estabilidade incondicional, entretanto exige cuidados adicionais ao ser aplicados a problemas não lineares, especialmente em casos que mobilizem altas frequências. Ao se utilizar uma descrição lagrangiana total, a matriz de massa discretizada permanece constante ao longo da análise, permitindo a utilização do integrador temporal de Newmark- $\beta$  mesmo em regime de grandes deslocamentos e grandes rotações como pode ser visto em Sanches e Coda (2013). Já para problemas fortemente não-lineares, como é o caso de problemas de impacto e contato, como pode ser visto em Greco e Coda (2006), modificações nos parâmetros do integrador tornam possível alcançar resultados satisfatórios, entretanto, isso acaba por introduzir no sistema dissipações numéricas consideráveis ao longo do tempo.

Siqueira (2019) verifica que o integrador  $\alpha$ -generalizado, proposto por Chung e Hulbert

(1993), garante estabilidade aos problemas fortemente não lineares com mínima dissipação em baixas frequências, e permitindo um melhor controle sobre as dissipações em altas frequências. Desse modo, Avancini (2023) adota com sucesso o método  $\alpha$ -generalizado para a formulação posicional no contexto de IFE com escoamentos de superfície livre.

## 1.1.2 Dinâmica dos fluidos computacional

A formulação matemática da dinâmica dos fluidos é muito conhecida na forma das equações de Navier-Stokes, as quais são obtidas a partir do desenvolvimento de equações de conservação de propriedades físicas do escoamento (massa, quantidade de movimento e energia). Apesar da formulação de Navier-Stokes para escoamentos ter sido construída no século XIX, a solução analítica dessas equações foi determinada apenas para poucos problemas bem-comportados (Fortuna, 2012). Segundo Fortuna (2012), a dificuldade de se encontrar tais soluções analiticamente está ligada ao fato de as equações de Navier-Stokes serem equações diferenciais parciais não lineares.

Monteiro (2002) aponta que, apesar das técnicas analíticas em sistemas dinâmicos permitirem a obtenção de expressões que valem para quaisquer valores dos parâmetros utilizados, elas têm a desvantagem de quase nunca permitirem uma integração analítica factível. Soma-se a isso o fato de que a teoria matemática para essa classe de problemas ainda é muito limitada, e conseqüentemente não permite uma solução geral para geometrias e condições de fronteira arbitrárias.

Nesse contexto, o estudo experimental da hidráulica foi fortemente desenvolvido, resultando na produção de diversas equações empíricas para determinadas hipóteses e geometrias. Isso permitiu a aplicação prática da hidráulica na Engenharia. Em livros-texto, como o de Porto (2006), pode-se encontrar formulações com base experimental para aplicações em escoamentos no interior de tubulações, redes de distribuição, escoamentos de superfície livre, canais, ressalto hidráulico e vertedores.

Em geral, essa abordagem experimental possui um escopo maior que as soluções analíticas, mas ainda limitada a geometrias e condições de contorno recorrentes. Soma-se a isso o fato de, em muitos casos, se perder ainda mais a generalidade da resposta devido aos efeitos de escala presentes na correspondência entre os modelos experimentais de escala reduzida e os problemas reais. Além disso, são soluções que consideram contornos fixos, conseqüentemente podem gerar resultados inadequados para a IFE. Nesse sentido, a modelagem numérica surge como uma ferramenta essencial para permitir a análise de escoamentos com geometrias complexas e condições de contorno gerais, como a interação com estruturas deformáveis.

A dinâmica dos fluidos computacional, conhecida também pelo acrônimo CFD, em inglês *Computational Fluid Dynamics*, pode ser formulada por diferentes métodos numéricos, tais como o Método das Diferenças Finitas (MDF), como em Fortuna (2012), o Método dos Volumes

Finitos (MVF), como em Moukalled *et al.* (2016) ou o Método dos Elementos Finitos (MEF), como pode ser visto em Bathe (1996) e Chung (2002).

Tendo em vista que fluidos podem se deformar indefinidamente, a abordagem euleriana é tradicionalmente empregada para a descrição dos escoamentos. Essa descrição promove o equacionamento tomando como referência uma posição fixa na configuração atual. Ou seja, na formulação euleriana, considera-se uma região fixa do espaço e promove-se a análise dos pontos materiais que passam por essa região ao longo do tempo (Sanches, 2022). Isso coloca dificuldades para a análise de escoamentos com contornos móveis, tais como escoamentos de superfície livre ou problemas de IFE.

Nesse sentido, é introduzida a descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária ou do inglês *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE) (Donea *et al.*, 1982). Essa descrição cinemática permite o movimento da malha de forma independente da partícula de fluido, possibilitando a deformação arbitrária do domínio fluido, acomodando as movimentações do contorno. Outra metodologia que permite a movimentação da malha do fluido de modo equivalente, é a formulação espaço-tempo estabilizada, como apresentado por Tezduyar *et al.* (1992c). Esses métodos são classificados como métodos de malhas móveis, sendo bastante robustos e amplamente utilizados, tal como nos trabalhos de Fernandes (2020), Sanches (2011) e Tang (2005). No entanto, tais métodos possuem dificuldades em problemas com distorção muito elevada no domínio do fluido, quando a malha do fluido não pode ser simplesmente deformada para acomodar a movimentação dos contornos, especialmente em problemas com mudanças topológicas do domínio, tais como problemas de IFE com contato estrutural ou escoamentos de superfície livre com efeitos de *splash*.

Como alternativa, para os problemas com mudanças topológicas no domínio do fluido, surgem os métodos com malhas fixas (Owen, 2009), onde é permitido à interface móvel deslocar-se imersa na malha do fluido. Em Delcour *et al.* (2022) um modelo numérico para a dinâmica de fluidos computacional (CFD) com malha de fundo fixa é apresentado e validada para investigar a influência da compressibilidade na instabilidade de *flutter* de um cilindro por meio de simulações de IFE. No modelo CFD, a grande deformação do cilindro é tratada por meio do emprego de uma técnica denominada "Quimera", permitindo assim que a malha de fundo permaneça fixa. Esses métodos são uma opção bastante atrativa, no entanto possuem como desvantagens a necessidade de técnica adicional para identificar as posições da interface móvel na malha fixa, a impossibilidade de garantir um refino adaptativo junto aos contornos móveis, de forma a capturar efeitos locais, tais como camada limite, além das dificuldade inerentes à consideração das condições de contorno imersas (Sanches, 2022).

Uma alternativa aos métodos de malhas móveis e de malhas fixas, são os métodos baseados em partículas, destacando-se os métodos SPH (Gingold; Monaghan, 1977), e MPS (Kondo; Koshizuka, 2011; Koshizuka; Oka, 1996). Nesses métodos, o fluido é representado por uma nuvem de pontos discretos (partículas), e modelos numéricos são empregados para determinar as interações entre os pontos de modo a representar a mecânica do contínuo. Low *et*

*al.* (2021) apresenta uma nova abordagem numérica do *Smooth Particle Hydrodynamics* para a solução de problemas de fluxo de superfície livre invíscida. A formulação é baseada em uma descrição lagrangiana total de um sistema de leis de conservação escritas em termos do momento linear e do jacobiano da deformação. Um dos objetivos desse trabalho é explorar o uso da descrição lagrangiana total no caso de grandes deformações, mas sem mudanças topológicas. Para alcançarem essa finalidade, os autores promovem a avaliação das integrais espaciais com relação à configuração inicial não deformada, produzindo uma formulação eficiente onde a necessidade de busca contínua de partículas vizinhas é contornada, algo bastante pertinente ao método empregado. Esses métodos são baseados na descrição lagrangiana, e são também empregados para a simulação de escoamentos de superfície livre com mudanças topológicas.

Buscando aliar vantagens do MEF com o conceito dos métodos de partículas, Idelsohn *et al.* (2004) propõem o Método dos Elementos Finitos e Partículas (PFEM). O PFEM consiste basicamente em considerar o domínio representado por uma nuvem de partículas que carregam as propriedades físicas do fluido, tais como densidade de massa, viscosidade, e campos incógnitos, como velocidade e pressão. Sobre as partículas gera-se uma malha de elementos finitos de forma a considerar as partículas como nós. Essa malha é utilizada para resolver a equação do movimento, e posteriormente é apagada e outra malha é construída, de modo a permitir distorção indefinida ao escoamento. A fim de realizar a reconstrução da malha do fluido para determinados passos de tempo, utiliza-se a técnica da triangulação de Delaunay para sólidos 2D e a geração de tetraedros nas formulações 3D. A malha do fluido gerada pelo PFEM utiliza apenas elementos lineares e a identificação da superfície livre é realizada por critérios geométricos de uma técnica denominada  $\alpha$ -shape (Avancini, 2023).

O PFEM, aplicado a escoamentos incompressíveis, tradicionalmente emprega velocidade e pressão como incógnitas nodais. Além das vantagens no tratamento das condições de contorno, ao empregar uma formulação lagrangiana, os termos convectivos desaparecem, sendo dispensado o emprego de técnica de estabilização para a convecção (Idelsohn *et al.*, 2004). Como resultado, o PFEM tem sido aplicado a diversos problemas de escoamentos de superfície livre, tais como apresentado em Aubry *et al.* (2006), Idelsohn *et al.* (2004) e Idelsohn *et al.* (2008).

Rizzieri *et al.* (2024) introduzem uma abordagem numérica para a simulação de processos de impressão de materiais cimentícios, com base na suposição de fluido homogêneo. Nesse contexto, o Método dos Elementos Finitos de Partículas é aplicado com sucesso na solução de problemas com grandes deformações e considerando uma lei reológica não newtoniana. Fu *et al.* (2023) propõem uma formulação lagrangiana-euleriana do PFEM para a simulação de escoamentos de superfície livre e interação fluido-estrutura. Essa nova abordagem explora as vantagens de ambas as formulações. De acordo com o método proposto, os nós na superfície livre do fluido e na interface fluido-estrutura são tratados como lagrangianos, enquanto os nós restantes podem ser eulerianos ou lagrangianos.

Avancini e Sanches (2020) apresentam uma formulação lagrangiana total, baseada nas

posições das partículas, para a simulação de escoamentos de superfície livre com distorção finita. Essa formulação dispensa a etapa adicional de atualização da malha que é necessária nas formulações baseadas em velocidades, uma vez que a variável é justamente a configuração atual do fluido. Embora a formulação seja equivalente à técnica baseada em deslocamentos que emprega descrição lagrangiana total, o diferente conceito torna o processo mais compacto e direto, além de ser natural e totalmente isoparamétrico, uma vez que os parâmetros nodais para a geometria atual são as incógnitas do problema.

Ao se tratar do PFEM, é interessante que as variáveis sejam as posições das partículas, assim, Avancini e Sanches também propuseram a aplicação da formulação baseada em posições para o PFEM (Avancini, 2023; Avancini *et al.*, 2024). Essa formulação tem sido aplicada com sucesso a diversos problemas de escoamentos com contornos móveis e mudanças topológicas de superfície livre 2D e 3D, incluindo interação fluido-estrutura com contato estrutural, como pode ser visto em Avancini (2023), Avancini *et al.* (2024) e Moreira (2021).

Segundo Avancini (2023), a formulação posicional do PFEM apresenta diversas vantagens para emprego em problemas de IFE, como a facilidade para acoplamento monolítico com sólidos e estruturas, o que é altamente desejável em problemas fortemente acoplados. Isso ocorre devido a utilização da mesma descrição matemática e das mesmas variáveis tanto para o sólido quanto para o fluido. Dessa forma, o algoritmo de acoplamento é direto, bastando realizar a contribuição nodal de ambos os domínios para o sistema global (Avancini, 2023).

No contexto do PFEM, raramente têm sido abordados problemas com paredes lisas (sem aderência) ou contornos espacialmente fixos de entrada ou saída. Conforme Avancini (2023), aplicar diretamente tais condições com o PFEM não é adequado, uma vez que os contornos são identificados em função das posições de partículas que permanecem fixas. Ao se permitir o movimento dos nós que discretizam uma parede, pode-se gerar problemas na definição do domínio durante a aplicação de um procedimento baseado em medidas geométricas da malha, denominado  $\alpha$ -shape. Avancini (2023) detalha que os elementos formados na região do contorno vão se distorcendo, devido à condição de deslizamento, até que a condição de eliminação da técnica  $\alpha$ -shape seja satisfeita, resultando na remoção de elementos fisicamente necessários, implicando em vazamento de partículas sem sentido físico. Já as condições de entrada e saída são impostas mais naturalmente em formulações eulerianas. Na descrição lagrangiana surgem dificuldades ao se prescrever velocidades aos nós que definem as entradas ou saídas, pois tais nós estão livres para se deslocar, resultando na perda da definição espacial desses contornos (Avancini, 2023).

Fernandes *et al.* (2019) e Yokomizo (2024) utilizam uma formulação euleriana para o domínio do fluido, permitindo a aplicação de condições de contorno de entrada e saída de forma simples e direta. Essa abordagem tradicional, contudo, apresenta dificuldades para a representação de contornos móveis, como é o caso de problemas de IFE e superfícies livres, sendo necessário a utilização de técnicas adicionais como ALE para a movimentação da malha do fluido.

A formulação posicional do PFEM, até antes do presente trabalho, apresentava algumas limitações, tais como não ser capaz de representar paredes lisas (sem condição de aderência), nem condições de entrada e saída para um domínio computacional aberto. Isso ocorre, pois as condições de entrada e saída são impostas mais naturalmente em formulações eulerianas. Na descrição lagrangiana surgem dificuldades ao se prescrever velocidades aos nós que definem as entradas ou saídas (Avancini, 2023).

### 1.1.2.1 Estabilidade numérica do campo de pressão

Ao se trabalhar com escoamentos incompressíveis, surge naturalmente a opção de se utilizar formulações mistas. A forma de imposição da incompressibilidade como apresentada em Avancini *et al.* (2024) resulta na pressão como um campo de multiplicador de Lagrange que impõe a condição de incompressibilidade, sendo possível notar que a pressão não está explicitamente definida na equação de incompressibilidade.

Consequentemente, a matriz tangente global resultará com termos nulos na diagonal principal, equivalente ao problema de ponto de sela do cálculo (Avancini, 2023). Essa propriedade é característica de problemas de multiplicadores de Lagrange e pode resultar em um sistema sem unicidade de solução, limitando assim a escolha das dimensões dos espaços de aproximações para as variáveis independentes do problema.

Nesse contexto, foram propostas as condições matemáticas de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) ou simplesmente condições *inf - sup*. As restrições LBB permitem garantir matematicamente a unicidade de solução para problemas de ponto de sela, consequentemente conduzem a um campo de pressão estável na convergência (BABUŠKA, 1973; BABUŠKA; NARASIMHAN, 1977).

BABUŠKA (1973) desenvolveu provas matemáticas para a taxa de convergência do problema de Dirichlet, utilizando multiplicadores de Lagrange. Em BABUŠKA e NARASIMHAN (1977) encontram-se as condições LBB no contexto do Método dos Elementos Finitos mistos, a partir das quais é possível provar a unicidade de solução. Nota-se que apesar dessa condição garantir uma estabilidade para o sistema discreto, nada é estabelecido sobre o quão bem a resposta discreta se aproxima da solução real. Em Bathe (1996) encontra-se um compilado de elementos finitos mistos que atendem às condições *inf - sup*. Utilizar elementos mistos estáveis, geralmente implica em utilizar funções de aproximação para o campo de pressão de uma ordem inferior às que aproximam posições (ou velocidades), como no caso dos elementos Mini T3PEB, Taylor-Hood T6P3, Mini TET4P4B, Taylor-Hood TET10P4 (Avancini, 2023; Bathe, 1996).

Essa restrição pode implicar na necessidade constante de se trabalhar com malhas ultra-refinadas para que se obtenha bons resultados no campo de pressão, mesmo que o campo de velocidades/posições já tenha uma boa exatidão. Em Gomes (2013) pode-se encontrar experimentos numéricos para verificar a estabilidade do campo de pressão com alguns elementos finitos

mistos, onde nota-se certa instabilidade em malhas estruturadas não cruzadas. Avancini (2023) ressalta que a utilização dos elementos mistos diretamente estáveis também torna a formulação menos flexível e dificulta o processo de remalhamento.

Nesse contexto, a fim de obter um método que resulte em pressões estáveis, consistentes, sem demandar grandes restrições sobre a malha e que permita um processo de remalhamento mais flexível que surgem as formulações estabilizadas consistentes, as quais contornam partes das restrições LBB por meio da introdução de parcelas para preencher a diagonal principal do sistema. A fim de manter a consistência, essa parcela deve ser nula na convergência, assim o caminho de solução é estabilizado, mas na convergência a equação governante consistente é atendida.

Nesse sentido, Tezduyar e colaboradores introduziram a estabilização *Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin* (PSPG), desenvolvida para formulações eulerianas e utilizando uma abordagem por resíduos ponderados (Bazilevs *et al.*, 2013; Tezduyar, 1991; Tezduyar *et al.*, 1992b). Inspirados nesses trabalhos, Sanches e Avancini introduziram a estabilização PSPG no contexto de formulações lagrangianas por meio de uma abordagem energética (Avancini *et al.*, 2024; Avancini, 2023).

### 1.1.2.2 Escoamentos multifásicos

O conceito de fase é estabelecido para uma região distinta de matéria cuja propriedades são as mesmas (Russell, 1994). Nesse sentido, um escoamento multifásico pode ser definido pela presença de duas ou mais fases, como ocorre nos sistemas constituídos por gelo e água líquida; ou óleo e água. Lembra-se que líquidos que misturam-se em todas as proporções, como acetona e água, são miscíveis; enquanto aqueles que não se dissolvem são imiscíveis (Brown *et al.*, 2012). Em geral, líquidos não polares (como misturas de hidrocarbonetos) tendem a ser insolúveis em líquidos polares (como a água) (Brown *et al.*, 2012).

Neste trabalho, são considerados apenas fluidos imiscíveis, ou seja, quando fluidos de diferentes características, que ao entrarem em repouso, separam-se em camadas bem definidas devido à incompatibilidade de forças intermoleculares e à polaridade dos fluidos. Nesse sentido, a mistura de tais fluidos resulta em escoamentos multifásicos, podendo ocorrer múltiplas interfaces fluido-fluido.

Nesse contexto, nota-se que a dinâmica de fluidos multifásica é um campo bastante complexo da mecânica dos fluidos, demandando o tratamento de múltiplas interfaces fluido-fluido, o tratamento de bolhas imersas e complicações devido às descontinuidades de massa específica e viscosidade entre os fluidos.

No contexto da dinâmica de fluidos multifásicos computacional, diversos métodos já foram aplicados a fim de simular esse fenômeno complexo. No campo do Método dos Volumes Finitos (MVF), têm-se os trabalhos de Hajibeygi e Jenny (2009), Huber e Helmig (2000), Jenny

*et al.* (2004), Jenny *et al.* (2006), Lunati e Jenny (2006) e Nikitin *et al.* (2014). Nota-se que Jenny *et al.* (2004) estendem a abordagem monofásica do MVF multiescala para a simulação de escoamentos multifásicos em meios porosos heterogêneos. O código implementado é testado com sucesso tanto com exemplos tanto 2D quanto tridimensionais. Lunati e Jenny (2006) introduzem uma versão modificada do MVF multiescala a fim de permitir a inclusão natural de novos modelos físicos. Dentro desse contexto, os autores conseguem aplicar o método para a simulação de escoamentos multifásicos compressíveis.

No âmbito do Método de Diferenças Finitas (MDF), destacam-se os trabalhos de Fangqi *et al.* (2014), Joubert *et al.* (2023) e Zhang e Abushaikha (2019). Onde Fangqi *et al.* (2014) aplicam um novo modelo do MDF para simular o fluxo multifásico em reservatórios com fraturas, considerando as descontinuidades de saturações entre as fases do escoamento. Já Joubert *et al.* (2023) apresentam um solucionador de diferenças finitas baseado em GPU para a simulação de fluxos multifásicos e, para possibilitar a modelagem de problemas com altos gradientes de massa específica, uma técnica de amortecimento artificial é aplicada.

No contexto de abordagens baseadas em *level-set*, destacam-se os trabalhos de Sussman *et al.* (1998), Tornberg e Engquist (2000) e Zhao *et al.* (1996). Onde Tornberg e Engquist (2000) apresentam a simulação numérica de fluxos multifásicos incompressíveis e bidimensionais, aplicando o método *level-set* e discretizações baseadas em elementos finitos. Sussman *et al.* (1998) aplicam a técnica de *level-set* para a captura da interface fluido-fluido e utilizam uma abordagem de projeção de massa específica a fim de permitir a simulação do fluxo bifásico com fusão de interfaces e alto número de Reynolds.

Na área de métodos de malhas móveis, destacam-se Tezduyar *et al.* (1992a), Tian e Li (2021), Dunn (2012) e Rabello *et al.* (2008) na simulação numérica de fluxos multifásicos. Nota-se que Tezduyar *et al.* (1992a) aplicam uma formulação MEF espaço-tempo estabilizada para o tratamento da interface fluido-fluido. Observa-se também que nesse trabalho os autores simulam apenas escoamentos bidimensionais e com interfaces fluido-fluido comportadas. Já Tian e Li (2021) apresentam uma formulação ALE para a simulação de escoamentos compressíveis multifásicos.

No âmbito de métodos de partículas, Zhang *et al.* (2025) e Zheng e Chen (2019) aplicam o método SPH para a simulação de escoamentos multifásicos, Liua e Zhang (2021), Shakibaeinia e Jin (2012) e Wen *et al.* (2021) aplicam o método MPS nesse sentido, enquanto Idelsohn *et al.* (2014), Idelsohn *et al.* (2009) e Torrecilla (2010) propõem o uso do PFEM para a simulação de escoamentos multifásicos.

Nota-se que em Shakibaeinia e Jin (2012) o modelo é verificado com os dois casos clássicos de instabilidade hidrodinâmica no contexto multifásico (instabilidade de Rayleigh-Taylor e instabilidade de Kelvin-Helmholtz). Além disso, observa-se que os autores utilizam um modelo de compressibilidade fraca no MPS para simular o escoamento incompressível. Liua e Zhang (2021) aplicam o MPS com uma técnica de multi-resolução adaptável a fim de simular

a divisão e fusão de partículas próximas à interface fluido-fluido. Essa abordagem é aplicada com sucesso nos problemas de instabilidade de Rayleigh-Taylor e de bolha ascendente. Wen *et al.* (2021) aplica o MPS para a simulação de escoamentos com múltiplas bolhas e complexas interfaces fluido-fluido.

Idelsohn *et al.* (2009) introduzem a simulação de escoamentos multifásicos no contexto do PFEM clássico, com a abordagem [velocidade, pressão]. São apresentadas simulações com inversão de camadas e com análise térmica. Nota-se que as simulações são apenas bidimensionais e em regiões de contorno fechado. Observa-se também que não são feitas simulações com interação fluido-ar, como ocorre no caso dos exemplos de ruptura de barragem. Idelsohn *et al.* (2014) aplicam o PFEM na abordagem tradicional [velocidade, pressão] para a simulação de escoamentos multifásicos. O diferencial desse trabalho é introduzir uma nova estratégia referente à integração temporal a fim de permitir passos de tempo uma ordem de magnitude maior que a tradicional. Essa abordagem é aplicada para a simulação de ruptura de ondas e no exemplo de ruptura de barragem de água com aparato rígido, onde-se forma-se um bolsão de ar. Nota-se que nesse exemplo do colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido, os resultados apresentam apenas concordância qualitativa, não chegando a capturar perfeitamente o fenômeno físico do bolsão de ar.

### 1.1.3 Interação fluido-estrutura computacional

A forma de se proceder à resolução do sistema de equações para o modelo de Interação Fluido-Estrutura pode ocorrer por meio de métodos monolíticos ou particionados. No modelo de acoplamento monolítico, os meios sólido e fluido, bem como a malha, são tratados como uma única entidade, com a formulação resultando em um único sistema não linear. Essa técnica garante a aplicação das condições de acoplamento, entretanto o sistema resultante é maior e pode configurar mal condicionado em função das diferentes ordens de grandeza das variáveis do fluido e da estrutura (Sanches, 2022).

Em Bazilevs *et al.* (2013) pode-se encontrar uma descrição didática dos diversos tipos de acoplamentos partindo-se do método de Newton-Raphson aplicado ao problema monolítico, denominado pelos autores de acoplamento direto. Partindo de modificações na matriz tangente, os autores definem o acoplamento quase-direto, que consiste basicamente no acoplamento monolítico entre fluido e a estrutura; enquanto o movimento da malha do fluido é processado de forma desacoplada, e por fim, à uma solução do tipo bloco-iterativa para a forma particionada de acoplamento.

Segundo Avancini (2023), nos esquemas particionados, os grupos físicos são solucionados separadamente, podendo-se utilizar diferentes métodos numéricos para cada meio, com o acoplamento sendo garantido pela transferência explícita ou direta de condições de interface entre os meios fluido e sólido. Os modelos de acoplamento particionado podem ainda ser

classificados em acoplamento particionado forte e acoplamento particionado fraco. Pela forma particionada fraca, como pode ser visto em Sanches (2022), Sanches e Coda (2013) e Suarez (2016), considera-se que as correções nas condições de interface sólido/fluido durante a solução do sistema não linear são desprezíveis, conduzindo a um acoplamento de forma explícita onde as condições de acoplamento são impostas apenas ao final de cada passo de tempo. Segundo Sanches (2022), essa forma de acoplamento tem um menor custo computacional e permite adotar passos de tempo diferentes para cada um dos meios, entretanto pode gerar erros inaceitáveis quando o passo de tempo adotado não for pequeno o suficiente, levando a soluções inconsistentes.

Nota-se que os métodos particionados são computacionalmente eficientes em determinadas aplicações, especialmente para problemas com escoamentos compressíveis, onde a massa específica da estrutura é muito maior que a do fluido e métodos explícitos podem ser adequadamente aplicados para a solução do escoamento, tal como no trabalho de Sanches (2006), que apresenta uma formulação bidimensional para a IFE, utilizando o algoritmo *Characteristic Based Split* (CBS) com descrição ALE para escoamentos compressíveis e a formulação posicional para a análise dinâmica das estruturas planas de barras. Seguindo a mesma linha, em Sanches (2011), Sanches e Coda (2013) e Sanches e Coda (2014), apresenta-se o acoplamento particionado fraco entre a solução explícita de escoamentos compressíveis com estruturas de casca em regime de grandes deslocamentos.

Sayed *et al.* (2019) realiza uma análise aeroelástica de uma turbina eólica aplicando uma abordagem de acoplamento explícito fraco. Nesse trabalho, o acoplamento é feito de forma escalonada e os dados entre os diferentes solucionadores são transferidos a cada passo de tempo com apenas uma iteração interna executada na interface de acoplamento. Nota-se que apenas uma iteração interna é realizada, de tal maneira que nenhuma iteração de interface é executada.

No acoplamento particionado forte, trabalha-se com sistemas independentes a serem resolvidos a cada iteração do processo de solução, com condições de contorno sendo transferidas de um sistema para o outro antes de se iniciar a iteração seguinte, de modo a garantir o acoplamento. A forma final da solução torna-se um processo bloco-iterativo de recorrência e atualização das variáveis até a convergência da solução (Sanches, 2022). Vierendeels *et al.* (2007) aplicam uma técnica de acoplamento particionado forte para a solução de problemas de IFE. De forma material, esse artigo apresenta uma técnica que usa o Jacobiano de modelos de ordem reduzida que são construídos durante as iterações de acoplamento. O desempenho e a acurácia do código são testados com um problema de propagação da onda de pressão em um vaso sanguíneo, e com outro exemplo de crescimento e desprendimento de bolha de gás. Ambos os exemplos atestam o desempenho do algorítmico e mostram resultados precisos (Vierendeels *et al.*, 2007).

Embora este método seja robusto e conduza a resultados precisos, nos casos em que o problema é fortemente acoplado, ou seja, quando uma pequena perturbação em um dos meios causa uma grande perturbação no outro, pode haver dificuldades de convergência, ou mesmo

instabilidade, na solução do sistema não linear, demandando técnicas numéricas adicionais (Fernandes *et al.*, 2019; Sanches, 2022).

No contexto dos acoplamentos monolíticos, Aulisa *et al.* (2018) e Lozovskiy *et al.* (2019) desenvolveram e aplicaram formulações unificadas para a IFE utilizando o ALE e baseado nas variáveis [velocidade, pressão]. Chiang *et al.* (2017) propõem uma forma de acoplamento unificado por meio de uma abordagem puramente euleriana e baseada também nas variáveis [velocidade, pressão]. Hubner *et al.* (2004) e Walhorn *et al.* (2005) desenvolveram um acoplamento unificado pelo MEF espaço-tempo utilizando a descrição clássica fundamentada nas variáveis [velocidade, pressão]. Nota-se que esses autores não aplicaram remalhamento em conjunto com o MEF espaço-tempo e assim conseguiram simular apenas moderadas mudanças topológicas.

Nota-se que esses trabalhos não apresentaram simulações com a generalidade que outros trabalhos alcançam com o PFEM para escoamentos que apresentam desprendimento e unificação de partes do domínio (como gotas). Franci *et al.* (2016) e Ryzhakov *et al.* (2010) iniciam uma abordagem alternativa para fluidos em descrição lagrangiana e promovem o acoplamento MEF/PFEM para a análise unificada de problemas de IFE. Também utilizando as mesmas variáveis clássicas. Além disso, nota-se que a abordagem apresentada utiliza apenas fluidos quase-incompressíveis, ou seja, assume-se uma pequena compressibilidade para que se possa relacionar a variação de volume com a pressão.

No âmbito da interação fluido-estrutura com escoamentos multifásicos, os trabalhos são mais escassos, contudo destacam-se os estudos de Liu *et al.* (2022), Yang *et al.* (2016) e Zhang *et al.* (2022). Liu *et al.* (2022) utilizam a estrutura de um *software* de código aberto para realizarem o tratamento dos acoplamentos fluido-fluido e fluido-estrutura. Yang *et al.* (2016) modelam a interação fluido-estrutura com escoamentos multifásicos, utilizando uma abordagem de imersão. Para a estrutura é utilizado um modelo de elemento finito discreto e para o fluido é aplicado o MEF. Para o acoplamento estrutural é introduzido um termo na formulação para transmitir as tensões do fluxo para a superfície do sólido. E utilizando uma técnica avançada de captura de interface, os autores conseguem resolver problemas multifásicos na presença de interfaces fluido-estrutura. Os autores verificam as implementações com quatro exemplos: cilindro em queda livre; membrana elástica; coluna de água em colapso com um sólido quadrado inicialmente em repouso; interface água-ar, considerando um sólido quadrado flutuante sendo movido pelo escoamento. Zhang *et al.* (2022) aplicam o método SPH para a simulação de escoamentos multifásicos com a presença de sólidos deformáveis. O tratamento da incompressibilidade do escoamento é feito de forma fraca e para evitar a penetração de partículas na simulação multifásica violenta, são empregados termos de penalização na discretização multi-resolução. Para validar o modelo, os autores testam com sucesso a pressão em tanques de água e ar hidrostáticos; simulam o colapso de uma coluna de água, considerando a presença do ar; simulam o fluxo de ruptura de uma barragem de água através de uma comporta elástica; e por fim modelam o fluxo de ruptura de barragem de água com impacto em uma comporta elástica, considerando o fluxo bifásico ar-água.

Os autores realizam apenas simulações bidimensionais, apesar disso obtêm boa concordância com resultados experimentais.

No contexto do grupo de pesquisa em que se insere este trabalho, Moreira (2021) apresenta um acoplamento monolítico entre escoamentos incompressíveis bidimensionais e sólidos elásticos com grandes deslocamentos, considerando uma abordagem do PFEM baseada em posições para fluidos newtonianos incompressíveis e a abordagem posicional do MEF para sólidos elásticos. A autora aplica a formulação desenvolvida à análise de válvula com contato entre folhetos. Já no trabalho de Avancini (2023) apresenta-se o acoplamento monolítico entre a formulação 3D do PFEM baseada em posições para escoamentos newtonianos incompressíveis com sólidos tridimensionais em formulação posicional do PFEM. Em ambos trabalhos problemas fortemente acoplados são simulados de maneira eficiente.

## 1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver e implementar, no contexto do PFEM baseado em posições, um modelo numérico que permita a análise de escoamentos com a presença de mais de um fluido e com múltiplas interfaces, permitindo a união e contato entre indefinidas interfaces fluido-fluido. Essa abordagem pode conduzir a simulações mais realistas de problemas de IFE ao se considerar a interação ar-líquido, e contribuirá para ampliar a gama de aplicações da plataforma computacional do grupo de pesquisas em que esta pesquisa se insere.

### 1.2.1 Objetivos específicos

- I Desenvolvimento e implementação de código para dinâmica de sólidos com grandes deslocamentos em descrição lagrangiana total.
- II Estudo aprofundado do PFEM aplicado a problemas de escoamentos com mudanças topológicas.
- III Desenvolver e implementar modelo para dinâmica de fluidos bifásicos no contexto do PFEM baseado em posições.
- IV Expandir a modelagem de escoamentos para permitir a análise multifásica com PFEM.
- V Desenvolver e implementar modelo numérico para permitir a aplicação de condições de contorno de entrada e saída contínua de fluido no contexto do PFEM baseado em posições.
- VI Desenvolver e implementar modelo numérico para permitir condição de escorregamento em regiões de contato fluido-parede no âmbito do PFEM baseado em posições.
- VII Aplicar os desenvolvimentos anteriores na análise de problemas de interação fluido-estrutura considerando o acoplamento monolítico.

VIII Verificar os modelos implementados por meio de simulações numéricas e comparação com resultados experimentais, analíticos ou numéricos da literatura.

## 1.3 Justificativa

O estudo de problemas de escoamentos com mudanças topológicas no domínio do fluido já é um campo bastante desafiador, e torna-se ainda mais complexo ao se envolver o acoplamento com sólidos deformáveis. Embora haja diversos trabalhos tratando da simulação numérica desses problemas, há ainda muito que se avançar para atender às demandas atuais da engenharia, de forma que as ferramentas computacionais possam ser efetivamente aplicadas na prática de engenharia nos casos mais corriqueiros. Isso já justifica esforços no sentido de desenvolver ou otimizar métodos e ferramentas computacionais nessa área.

Neste contexto, o grupo de pesquisas em que este trabalho se insere propôs e vem desenvolvendo uma formulação do PFEM baseada nas posições das partículas, a qual tem sido aplicada a escoamentos newtonianos incompressíveis com mudanças topológicas. Essa formulação tem se mostrado muito eficiente como podem ser vistos nos trabalhos recentes de Avancini (2023), Avancini *et al.* (2017) e Moreira (2021). No entanto, ainda existem diversos aspectos que podem ser aprimorados nessa formulação. Como exemplos, no estado atual, é possível considerar apenas condições de total aderência entre fluido e estrutura ou fluido e contornos rígidos, além disso, trabalha-se apenas com escoamentos com volumes de fluido fechados, não sendo possível considerar de forma direta contornos de entrada e saída com escoamento para dentro ou para fora do domínio computacional. Ainda, os trabalhos desenvolvidos até o momento consideram apenas um fluido, sendo que nas simulações de interação entre líquido e sólidos, não é possível considerar a interação com o ar, o que pode ser importante para se obter resultados mais realistas em problemas tais como *sloshing* em reservatórios.

Com as implementações propostas neste estudo é possível desenvolver e estruturar uma base computacional robusta para futuras aplicações em Engenharia de Petróleo (escoamentos multifásicos), Engenharia Civil (análise dinâmica de reservatórios flexíveis e barragens), Engenharia Aeronáutica (escoamentos em domínio aberto com IFE) e Engenharia Hidráulica (análise de canais e escoamentos de superfície livre considerando interface água-ar naturalmente).

Assim, ao se propor o desenvolvimento de estratégias para a simulação de escoamentos multifásicos em conjunto com técnicas para a consideração de diferentes condições de contorno, amplia-se o conjunto de aplicações possíveis, bem como da plataforma computacional do grupo, permitindo que outros estudos sejam desenvolvidos. Por fim, justifica-se também a contribuição com a formação de recursos humanos, uma vez que proporciona ao mestrando uma formação ampla no contexto da mecânica computacional, com trabalho bastante interdisciplinar.

## 1.4 Metodologia

O processo de desenvolvimento deste trabalho segue a metodologia clássica de trabalhos na área de modelagem computacional. O início do projeto envolve a revisão bibliográfica, que segue continuamente ao longo do trabalho, e a construção da fundamentação teórica da pesquisa.

Embora o grupo de pesquisa possua uma ampla biblioteca de códigos computacionais, a fim de permitir ao mestrando o aprendizado da linguagem de programação e das bibliotecas de computação científica adotadas pelo grupo, iniciam-se as implementações com o desenvolvimento completo de um programa para dinâmica não linear dos sólidos, aplicando o Método dos Elementos Finitos em abordagem baseada em posições; já para o restante das implementações, parte-se do código para escoamentos incompressíveis e interação fluido-estrutura baseado no PFEM disponibilizado pelo grupo de pesquisa, o qual foi desenvolvido a partir de contribuições de Avancini (2023) e Moreira (2021).

A partir da revisão da literatura, parte-se para a formulação teórica das alternativas para modelagem de fluidos multifásicos com o PFEM baseado em posições. A estratégia para o desenvolvimento do modelo de escoamento multifásico consiste na identificação das partículas pertencentes a cada domínio fluido durante o pré-processamento, estabelecendo um rótulo para cada partícula que identifique o tipo de fluido, e atribuindo os parâmetros físicos adequados. Durante as simulações, os elementos que possuam partículas de diferentes fluidos, devem ter as características físicas variáveis, interpoladas a partir dos valores nodais (das partículas que compõem o elemento). Durante o processo de solução, com contínuo remalhamento, empregadas técnicas de realocação de partículas para garantir a qualidade da malha que devem observar o meio ao qual pertence a partícula a ser realocada de forma que essa operação seja realizada de forma consistente.

Para que possam ser implementadas as condições de contorno de entrada e saída, será considerada uma técnica de reposicionamento de partículas aliada ao método  $\alpha$ -*shape* tradicionalmente utilizado no PFEM. Para a consideração de paredes lisas implementa-se uma abordagem que permita o movimento tangencial das partículas na parede lisa, independentemente do movimento da parede, e posteriormente aplica-se uma técnica de reposicionamento dessas partículas juntamente com medidas para garantir a qualidade da malha, baseadas na realocação de partículas de domínio que se tornem muito próximas ao contorno.

Tanto implementações como simulações são realizadas utilizando o sistema operacional LINUX, empregando-se ferramentas computacionais livres e de código aberto. As implementações são feitas em linguagem C++, com o protocolo *Message Passing Interface* - MPI de processamento paralelo, já utilizado no programa, com a biblioteca *PETSc*<sup>1</sup> para a solução dos

<sup>1</sup> Biblioteca de computação científica com suporte MPI disponível em: <<https://petsc.org/release/>>.

sistemas e os programas *Tetgen*<sup>2</sup> e *Triangle*<sup>3</sup> para execução da triangulação de Delaunay no 3D e no 2D, respectivamente. Para pré e pós processamento, são empregados os programas *Gmsh*<sup>4</sup>, *Paraview*<sup>5</sup> e *GnuPlot*<sup>6</sup>.

Devido às características do PFEM, limita-se ao uso de elementos finitos de aproximação linear com a mesma ordem de aproximação para pressão e posição. Nota-se que no contexto de escoamentos incompressíveis, no PFEM há a necessidade de que seja empregado o uso de formulação estabilizada para contornar as restrições de Babuska-Brezzi.

### 1.4.1 Organização do texto

Os temas deste trabalho são organizados em capítulos, conforme a seguir:

No Capítulo 2 são apresentados os fundamentos da Mecânica dos Sólidos, introduzindo-se os conceitos necessários para uma análise dinâmica não linear geométrica. O Capítulo 3 descreve o ferramental numérico mínimo para a aplicação do Método dos Elementos Finitos, em sua abordagem baseada em posições, na solução de sistemas dinâmicos de estruturas com grandes deslocamentos. Nesse capítulo também apresentam-se alguns exemplos numéricos a fim de verificar as implementações realizadas com o MEF posicional em estruturas.

O Capítulo 4 introduz os conceitos fundamentais da Mecânica dos Fluidos, apresentando as equações de conservação e relações constitutivas para fluidos newtonianos. Nesse capítulo, aproveita-se a cinemática da Mecânica do Contínuo já introduzida no Capítulo 2, complementando com conceitos relativos à taxa de deformação, essencial na análise de escoamentos. No Capítulo 5 é apresentada a técnica numérica utilizada para a análise de escoamentos incompressíveis, desenvolvendo-se o Método dos Elementos Finitos, em sua abordagem lagrangiana Parcialmente Atualizada e baseada em posições, para a solução das equações de Navier-Stokes. Nota-se que a abordagem introduzida nesse capítulo permite apenas a análise de escoamentos com distorções finitas, devido à descrição lagrangiana adotada. Nesse contexto, o Capítulo 6 apresenta a técnica de remalhamento do Método dos Elementos Finitos e Partículas (PFEM) e o controle de qualidade de malha inerente a esse método, a fim de permitir a análise de escoamentos com mudanças topológicas, mesmo utilizando uma abordagem lagrangiana do MEF. Além disso, desenvolve-se uma técnica numérica para a análise de escoamentos multifásicos e para a análise de condições de entrada e saída espacialmente fixas, bem como a técnica para tratar contato fluido-estrutura com deslizamento pelo PFEM.

No Capítulo 8 apresenta-se a técnica de acoplamento monolítico para a análise da Interação Fluido-Estrutura. Apresenta-se também a forma de detecção do contato fluido-estrutura

<sup>2</sup> Gerador de malha desenvolvido por Hang Si, disponível em: <<https://wias-berlin.de/software/tetgen/>>.

<sup>3</sup> Gerador de malha triangular, disponível em: <<https://www.cs.5cmu.edu/quake/triangle.html>>.

<sup>4</sup> Gerador de malha desenvolvido por C. Geuzaine e J. F. Remacle, disponível em: <<https://gmsh.info/>>.

<sup>5</sup> Visualizador gráfico de resultados, disponível em: <<https://www.paraview.org/>>.

<sup>6</sup> Programa para plotar gráficos, disponível em <<http://www.gnuplot.info/>>.

no caso de escoamentos multifásicos. Por fim, o Capítulo 9 ressalta os objetivos alcançados e alguns tópicos potenciais de pesquisas futuras.

## Capítulo 2

# Mecânica dos sólidos

Neste capítulo apresenta-se uma formulação para análise dinâmica de sólidos elásticos com grandes deslocamentos em descrição lagrangiana total. Parte-se da hipótese de meio contínuo, o que permite uma análise consistente para uma grande quantidade de problemas, especialmente em casos macroscópicos. Mesmo em casos com descontinuidades localizadas relevantes, ainda é possível aplicar essa formulação à parcela contínua do domínio. Além disso, essa descrição matemática é utilizada como base da formulação do Método dos Elementos Finitos baseado em posições apresentada no capítulo 3.

### 2.1 Cinemática

Nesta seção, apresenta-se a descrição cinemática do movimento de sólidos contínuos em termos das posições. A não linearidade geométrica será considerada diretamente e de forma natural com uma descrição lagrangiana total. O estudo da cinemática envolve principalmente a análise da mudança de configuração e definição da medida de deformação.

#### 2.1.1 Mudança de configuração

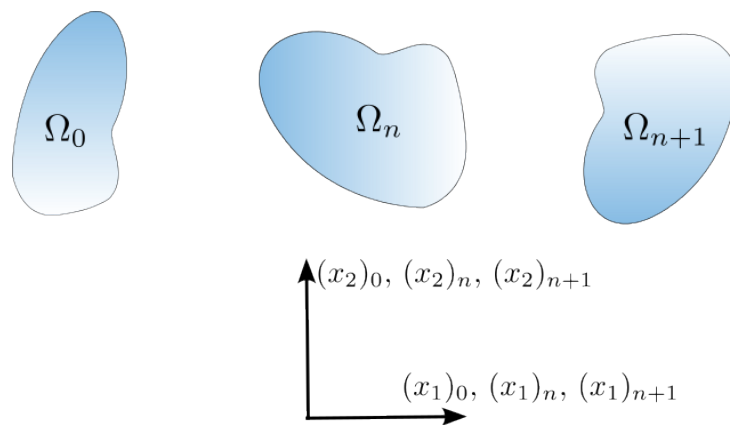
Para se descrever o movimento de corpos contínuos, primeiramente faz-se necessário adotar uma configuração que sirva de referência. Nesse sentido, existem duas descrições tradicionalmente empregadas na mecânica de meios contínuos, a descrição euleriana, ou descrição espacial, que toma uma configuração fixa na configuração atual do meio contínuo, e a descrição lagrangiana, ou material, que adota uma configuração material de equilíbrio como referência e descreve o movimento de cada ponto material que compõe o corpo ao longo do tempo.

Um equacionamento adequado à análise numérica de problemas de mecânica dos sólidos com grandes deslocamentos demanda uma descrição objetiva e cinematicamente exata da deformação para todo o domínio sólido. Tendo em vista que os sólidos em regime elástico

apresentam deformações finitas, possuindo uma configuração inicial bem definida, adota-se uma descrição lagrangiana para a descrição cinemática do movimento. Para estudos complementares aos desenvolvimentos desta seção, pode-se consultar textos como Coda (2018), Holzapfel (2000), Ogden (1997) e Sanches (2022).

Existem três possibilidades para se adotar uma configuração material de referência, conforme ilustrado na Figura 1: 1) adotar a configuração inicial, indeformada, do corpo, definida no instante  $t_0$ , obtendo-se a descrição conhecida como lagrangiana total; 2) adotar uma configuração de equilíbrio intermediária, definida em um instante  $t_n$ , entre o instante inicial  $t_0$  e o instante atual  $t_{n+1}$ , o que resulta na descrição denominada lagrangiana parcialmente atualizada; e 3) adotar a configuração atual do corpo contínuo (também denominada configuração de equilíbrio tentativa na descrição dos processos de solução), resultando na descrição lagrangiana atualizada ou também denominada de lagrangiana totalmente atualizada.

Figura 1 – Configurações de referência: inicial, última configuração equilibrada e atual.



Fonte: Autoria Própria.

A Figura 2 ilustra a aplicação da função da mudança de configuração sobre o domínio inicial. Essa função mapeia os vetores de posição de cada ponto material do sólido deformável da configuração inicial para a atual. Nota-se que durante a transformação  $\mathbf{F}$  promovida pela função mudança de configuração  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  o comprimento de uma determinada fibra  $\Delta x_0$  do espaço inicial  $\Omega_0$  é alterado para  $\Delta x_{n+1}$  na configuração atual  $\Omega_{n+1}$ . Essa variação de comprimento em conjunto com a rotação de uma fibra qualquer compõem a mudança de configuração.

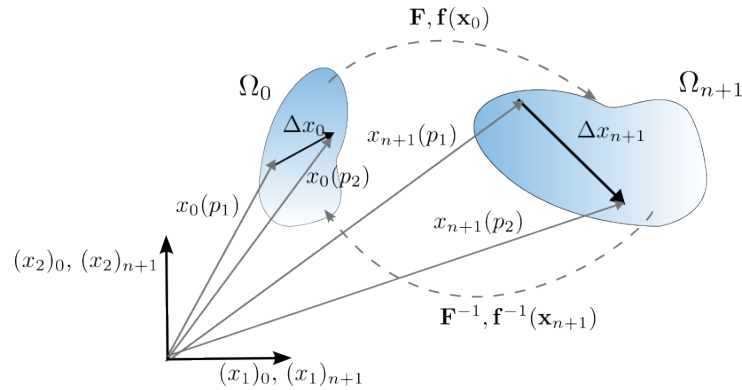
A equação

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) \quad (2.1)$$

expressa matematicamente a função mudança de configuração da Figura 2. Os termos 0 e  $n + 1$  não representam soma indicial, mas apenas denotam as configurações de referência inicial e atual, respectivamente, conforme já ilustrado pela Figura 1.

A diferença entre dois pontos na configuração atual gera um vetor  $\Delta \mathbf{x}_{n+1}$ . De forma equivalente essa diferença no espaço inicial gera um vetor  $\Delta \mathbf{x}_0$ , conforme ilustrado pela Figura

Figura 2 – Mudança de configuração: transformação do domínio inicial para o atual.



Fonte: Autoria Própria.

2. No limite de  $\Delta \mathbf{x}_0$  tender a 0, a equação

$$\Delta \mathbf{x}_{n+1} = \nabla_0 \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{x}_0 \quad (2.2)$$

é válida para mapear uma fibra qualquer do domínio do sólido da configuração inicial para a configuração atual. Nesse contexto, também surge a definição do tensor gradiente da função mudança de configuração em relação à configuração inicial denotado por  $\mathbf{F}$ . A equação

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla_0 \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_0} \\ F_{ij} &= f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial (x_j)_0} \end{aligned} \quad (2.3)$$

define esse tensor de segunda ordem em notação simbólica e indicial, respectivamente.

Durante a mudança de configuração podem surgir variações volumétricas, nesse sentido torna-se importante definir a medida de deformação volumétrica dada pela equação

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \frac{d\Omega_{n+1} - d\Omega_0}{d\Omega_0} = \frac{d\Omega_{n+1}}{d\Omega_0} - 1 = J - 1 \\ J &= \frac{d\Omega_{n+1}}{d\Omega_0} = \det(\mathbf{F}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Onde  $d\Omega_0$  é um volume infinitesimal inicial e  $d\Omega_{n+1}$  é um volume infinitesimal atual. Nesse contexto também surge a definição do jacobiano da mudança de configuração dado por  $J$ .

Ainda no contexto da mudança de configuração, é possível definir expressões para mudanças infinitesimais de volume e de área. Isso é útil para transferir o domínio de integração do domínio na configuração atual para a configuração inicial. Tomando-se um volume infinitesimal na configuração inicial, na atual e utilizando a equação (2.2) pode-se chegar à expressão para mudança de volume dada pela equação

$$d\Omega_{n+1} = J d\Omega_0. \quad (2.5)$$

Calculando o volume de um cilindro infinitesimal na configuração inicial, na atual e utilizando a relação dada por (2.5), para mudança de volume, pode-se determinar a expressão para mudança de áreas dada pela equação

$$n d\Gamma_{n+1} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} d\Gamma_0, \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o versor normal à área atual  $d\Gamma_{n+1}$ ,  $\mathbf{N}$  é o versor normal à área inicial  $d\Gamma_0$ . Essa expressão também é conhecida como Fórmula de Nanson.

### 2.1.2 Medida de deformação

Existem diversas medidas de deformação que visam representar a mudança de forma em corpos contínuos. No contexto deste trabalho será utilizada a medida de deformação de Green-Lagrange expressa pela equação

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o alongamento à direita de Cauchy-Green. dado por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}. \quad (2.8)$$

Nota-se que  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{C}$  são medidas lagrangianas de deformação, no entanto,  $\mathbf{F}$  não é objetiva, pois resulta em valores não nulos para rotação de corpo rígido.  $\mathbf{C}$  já é uma medida objetiva quanto à rotação, no entanto, para translação de corpo rígido resulta na matriz identidade. Já a deformação de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ , que é obtida pela normalização de  $\mathbf{C}$ , trata-se de uma medida de deformação objetiva e normalizada, adequada para problemas com grandes deslocamentos e grandes rotações.

Ademais, ressalta-se que a deformação usual utilizada para pequenas deformações, denominada de deformação linear, não é objetiva no contexto da não linearidade geométrica, pois surgem deformações para rotações de corpo rígido, como pode ser visto em Coda (2018).

## 2.2 Equações governantes da mecânica dos sólidos

Tendo em vista a possibilidade de grandes deslocamentos, deve-se considerar o equilíbrio dinâmico na condição deformada do corpo, ou seja, na configuração atual.

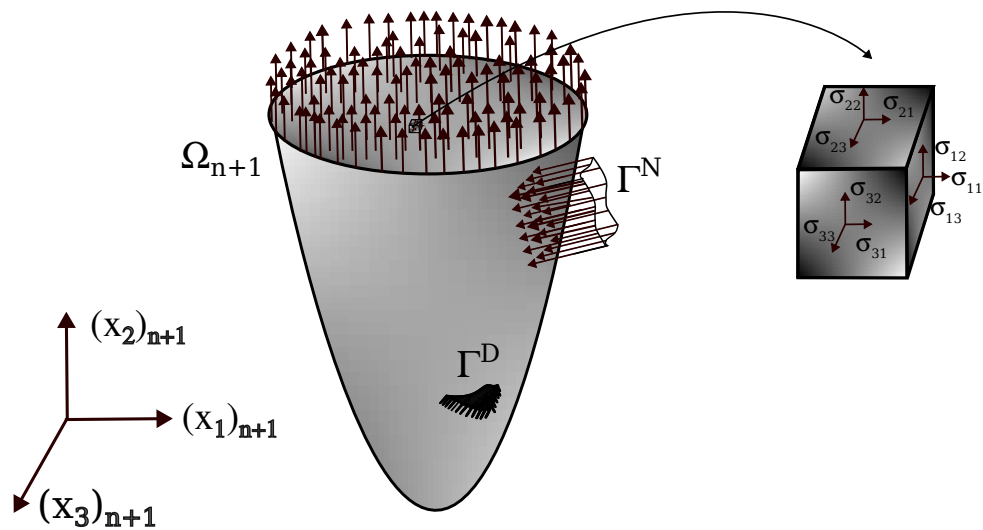
As equações governantes da mecânica dos sólidos podem ser descritas localmente por meio de equações diferenciais ou em termos globais por meio da integração no domínio. Tais equações também podem ser formuladas tanto em descrição lagrangiana quanto euleriana. Nesse contexto, esta seção apresenta a obtenção das equações governantes em descrição lagrangiana tanto locais quanto globais.

### 2.2.1 Medidas de tensão

As tensões são medidas úteis para avaliar o grau de sollicitação interna em um corpo. A medida mais comum é a tensão de Cauchy, que é uma grandeza euleriana, ou seja, é definida

em relação à configuração deformada como apresentado na Figura 3. A definição básica de tensão é dada pela relação entre força e área, de modo que a tensão de Cauchy é definida em função de forças e áreas atuais. Já a tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie relaciona as forças internas atuais com a área inicial, sendo portanto uma grandeza lagrangiana. E, o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie relaciona tanto forças quanto áreas da configuração inicial por projeção.

Figura 3 – Tensor de tensões de Cauchy: medida na configuração deformada.



Fonte: Autoria Própria.

Fazendo seis cortes ortogonais aos eixos de referência em um sólido na configuração atual, pode-se definir um cubo elementar e as suas componentes de tensão, que são obtidas pela projeção dos vetores de tensão em cada face (resultante das forças internas sobre cada face). Prosseguindo com a projeção dos vetores de tensão pode-se definir o estado de tensões em coordenadas cartesianas para o tensor de Cauchy, onde esse estado de tensões pode ser representado matricialmente por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

sendo cada componente ilustrada graficamente no elemento infinitesimal extraído sólido da Figura 3.

Conhecendo o campo de tensão em um sólido deformável, pode-se determinar as componentes de tensão internas ao corpo  $t$ , segundo um plano com versor normal  $\mathbf{n}$ , pela fórmula de Cauchy

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} \text{ ou } t_i = \sigma_{ji}n_j \quad (2.10)$$

e as forças de superfície  $\mathbf{f}$ , com versor normal  $\mathbf{n}$ , dada pela equação

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}. \quad (2.11)$$

A diferença entre  $t$  e  $f$  está no fato da primeira atuar internamente ao corpo, enquanto esta atua sobre o contorno físico do corpo (Coda, 2018).

A partir da fórmula de Cauchy (2.10) e da fórmula de Nanson para áreas (2.6) pode-se chegar à definição do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff:

$$\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.12)$$

Nota-se que devido à dependência de  $\mathbf{F}^{-1}$  o piola de primeira espécie não será necessariamente simétrico. Nesse sentido, pós-multiplicando  $\mathbf{P}$  por  $\mathbf{F}^{-T}$  chega-se à definição do segundo tensor de Piola-Kirchhoff que tem a propriedade de simetria intrínseca:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.13)$$

Apesar de  $\mathbf{S}$  ter a propriedade de simetria intrínseca, tal tensor não possui uma interpretação física.

Neste trabalho será utilizado principalmente a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie por ser uma medida lagrangiana e um tensor simétrico. Dessa forma, para recuperar as tensões de Cauchy atuantes na configuração deformada, basta aplicar a equação

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T. \quad (2.14)$$

## 2.2.2 Conservação da massa

Em um sistema fechado, sem reações atômicas, sem entrada ou saídas de partículas, a massa deve permanecer constante. Assim, integrando-se a densidade de massa no domínio inicial, chega-se à equação global de conservação de massa dada por:

$$m = \int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} d\Omega_{n+1} = \int_{\Omega_0} \rho_0 d\Omega_0, \quad (2.15)$$

onde  $\rho_{n+1}$  é a massa específica atual e  $\rho_0$  é a massa específica inicial.

Aplicando a equação (2.5) em (2.15), a fim de mudar o domínio de integração da configuração atual para a inicial, chega-se à equação

$$\int_{\Omega_0} \rho_{n+1} J d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 d\Omega_0. \quad (2.16)$$

Pela arbitrariedade do domínio de integração pode-se chegar à forma local do princípio de conservação de massa dada por:

$$\rho_{n+1} J = \rho_0. \quad (2.17)$$

## 2.2.3 Equação do movimento de Cauchy-Euler

Em um sistema fechado e com a força externa resultante nula, a quantidade de movimento total (*momentum*) do sistema é conservado. Já em um sistema que considera a atuação de forças

externas com resultante não nula, essa resultante deve ser igual à variação da quantidade de movimento  $\dot{\mathbf{L}}$  no domínio considerado (primeira lei de Cauchy-Euler), como apresentado em:

$$\mathbf{Q}_r = \dot{\mathbf{L}} = \int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} d\Omega_{n+1}. \quad (2.18)$$

Onde o termo  $\mathbf{L}$  é o momento linear (translação);  $\rho_{n+1}$  é a massa específica atual e  $\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}$  é a aceleração na configuração atual, tomada como a derivada material da velocidade.

Em um problema contínuo, no instante atual  $n + 1$ , as forças externas podem ser de domínio  $\mathbf{b}_{n+1}$  ou de superfície  $\mathbf{f}_{n+1}$ . Fazendo a integração das forças de superfície no contorno  $\Gamma_{n+1}$  e a integração das forças de volume no domínio  $\Omega_{n+1}$  e substituindo em (2.18) chega-se à equação de movimento de translação global dada por:

$$\int_{\Gamma_{n+1}} \mathbf{f}_{n+1} d\Gamma_{n+1} + \int_{\Omega_{n+1}} \mathbf{b}_{n+1} d\Omega_{n+1} = \int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} d\Omega_{n+1}. \quad (2.19)$$

Considerando a fórmula de Cauchy (2.10) para escrever as forças de superfície em termos do campo de tensão e aplicando o teorema da divergência de Gauss pode-se transferir a integração do contorno para o domínio, resultando na equação

$$\int_{\Omega_{n+1}} \nabla_{n+1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T d\Omega_{n+1} + \int_{\Omega_{n+1}} \mathbf{b}_{n+1} d\Omega_{n+1} = \int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} d\Omega_{n+1}, \quad (2.20)$$

onde  $\nabla_{n+1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T$  é o divergente do tensor de tensões de Cauchy.

Pela arbitrariedade do domínio de integração  $d\Omega_{n+1}$  pode-se chegar à forma local da equação de equilíbrio dinâmico, também denominada de equação de quantidade de movimento linear, em descrição euleriana, dada por:

$$\nabla_{n+1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{b}_{n+1} = \rho_{n+1} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}. \quad (2.21)$$

Escrevendo  $\boldsymbol{\sigma}$  em termos do primeiro Piola, considerando a força externa de domínio conservativa tal que  $\mathbf{b}_{n+1} J = \mathbf{b}_0$  e aplicando a conservação da massa (2.17) chega-se à equação de equilíbrio local em descrição lagrangiana:

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}. \quad (2.22)$$

Integrando a equação anterior no domínio inicial, aplicando o teorema de Gauss e utilizando a fórmula de Cauchy chega-se à equação de equilíbrio dinâmico global em descrição lagrangiana como em:

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{N} d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} d\Omega_0. \quad (2.23)$$

Onde  $\mathbf{N}$  é o versor normal à superfície inicial  $\Gamma_0$ ;  $\mathbf{b}_0$  é campo de forças de volume no domínio inicial  $\Omega_0$ ; e  $\rho_0$  é a massa específica inicial.

Substituindo o tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie  $\mathbf{P}$  pelo tensor de Piola de segunda espécie  $\mathbf{S}$ , e aplicando a relação entre o primeiro e o segundo tensor de Piola  $\mathbf{P}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$  chega-se à equação de equilíbrio global em descrição lagrangiana em termos do segundo Piola dada por:

$$\int_{\Gamma_0} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{N} d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} d\Omega_0. \quad (2.24)$$

Por fim, vale ressaltar que o equilíbrio em termos de rotação é garantido por  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$  ou em termos indiciais por  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Para mais detalhes dessa dedução pode-se consultar Coda (2018). Portanto, nesta seção foram apresentadas as equações do movimento global para um sólido deformável, considerando uma cinemática não linear geométrica e uma descrição lagrangiana total. No capítulo 3, essas equações são resolvidas pelo Método dos Elementos Finitos baseado em posições.

## 2.3 Modelo constitutivo

Os modelos constitutivos permitem relacionar as tensões desenvolvidas no sólido com as suas deformações. Nesta seção são apresentados modelos constitutivos hiperelásticos da elasticidade não linear. Um modelo constitutivo hiperelástico é dito hiperelástico quando o seu comportamento pode ser descrito a partir de uma expressão fechada para a energia específica de deformação (Coda, 2018).

O modelo constitutivo fica bem posto a partir da definição de sua energia de deformação, pois a partir dela pode-se determinar as tensões

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{ou} \quad S_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} \quad (2.25)$$

e também determinar o tensor constitutivo de quarta ordem  $\mathfrak{C}$ , dado por:

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} \quad \text{ou} \quad C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}}. \quad (2.26)$$

### 2.3.1 Saint-Venant-Kirchhoff para sólidos tridimensionais

Na equação

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{G_{mat}}{1 - 2\nu} [(1 - \nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2) + 2\nu(E_{11}E_{22} + E_{11}E_{33} + E_{22}E_{33}) + \\ + (1 - 2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2 + E_{13}^2 + E_{31}^2 + E_{23}^2 + E_{32}^2)] \end{aligned} \quad (2.27)$$

ou

$$\Psi = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathfrak{C} : \mathbf{E}$$

apresenta-se a energia específica de deformação  $\Psi$  para materiais isotrópicos, com deformações moderadas e tridimensionais. Esse modelo constitutivo é o de Saint-Venant-Kirchhoff para elasticidade tridimensional. Onde  $\mathbf{E}$  é o tensor de deformação de Green, sendo que na equação aparecem as suas componentes;  $\nu$  é o coeficiente de poisson;  $G_{mat}$  é o módulo de elasticidade transversal dado por  $G_{mat} = \frac{E_{mat}}{2(1+\nu)}$ ; e  $E_{mat}$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Aplicando as equações (2.25) e (2.26) sobre o atual modelo constitutivo chega-se à relação para as tensões

$$\mathbf{S} = \mathfrak{C} : \mathbf{E} \quad \text{ou} \quad S_{ij} = 2G_{mat}E_{ij} + \lambda E_{kk}\delta_{ij} \quad (2.28)$$

e para o tensor constitutivo

$$\mathfrak{C} = 2GI_1 \otimes I_2 + \lambda I_3 \otimes I_4 \quad \text{ou} \quad C_{ijkl} = 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (2.29)$$

Onde  $\lambda$  é a constante de Lamé do material dada por  $\lambda = \frac{E_{mat}\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ ;  $\delta_{ij}$  é o operador delta de Kronecker que é equivalente à matriz identidade em notação indicial. Nota-se que na forma compacta da equação (2.29) há perda de informação em relação à ordem de operação dos índices no produto tensorial entre as matrizes identidades  $\mathbf{I}$ .

### 2.3.2 Estado plano de deformação

Para o sólido bidimensional em estado plano de deformação (EPD) aplica-se restrições cinemáticas sobre o campo de deformação:  $E_{13} = E_{31} = E_{23} = E_{32} = E_{33} = 0$ . Portanto, para o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff em EPD, a energia de deformação é dada pela equação

$$\Psi = \frac{G_{mat}}{1-2\nu}[(1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2\nu(E_{11}E_{22}) + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2)]. \quad (2.30)$$

Desenvolvendo as equações (2.25) e (2.26), bem como as hipóteses do EPD, chega-se à relação tensão-deformação:

$$\mathbf{S} = \mathfrak{C} : \mathbf{E} \quad \text{ou} \quad S_{ij} = 2G_{mat}E_{ij} + \lambda E_{kk}\delta_{ij}, \quad (2.31)$$

para  $i, j$  e  $k$  variando de 1 a 2. E ainda obtém-se:

$$\mathfrak{C} = 2GI \otimes I + \lambda I \otimes I \quad \text{ou} \quad C_{ijkl} = 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (2.32)$$

para o tensor constitutivo e suas componentes, onde  $i, j, k$  e  $l$  também variam de 1 a 2.

### 2.3.3 Estado plano de tensão

Para o sólido bidimensional em estado plano de tensão (EPT) aplicam-se restrições sobre o campo de tensão:  $S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0$ . Portanto, para o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff em EPT, a energia de deformação é dada pela equação

$$\Psi = \frac{G_{mat}}{1-\nu}[(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2\nu(E_{11}E_{22}) + (1-\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2)]. \quad (2.33)$$

Aplicando as relações constitutivas (2.25) e (2.26) sobre o atual modelo de EPT chega-se à relação para as tensões

$$\mathbf{S} = \mathfrak{C} : \mathbf{E} \quad \text{ou} \quad S_{ij} = 2G_{mat}E_{ij} + \bar{\lambda}E_{kk}\delta_{ij} \quad (2.34)$$

para  $i, j$  e  $k$  variando de 1 a 2. E para o tensor constitutivo e suas componentes obtém-se:

$$\mathfrak{C} = 2GI \otimes I + \bar{\lambda}I \otimes I \quad \text{ou} \quad C_{ijkl} = 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + \bar{\lambda}\delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (2.35)$$

Onde  $i, j, k$  e  $l$  variam de 1 a 2; e  $\bar{\lambda}$  é um coeficiente constitutivo modificado para o EPT dado por  $\bar{\lambda} = \frac{\nu E_{mat}}{(1-\nu^2)}$ .



## Capítulo 3

# Método dos elementos finitos para sólidos com grandes deslocamentos

Neste capítulo, o sistema de equações diferenciais parciais que governa a mecânica dos sólidos deformáveis, descritas na forma lagrangiana total, é resolvido pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). O sistema não linear obtido pelo MEF é resolvido pelo método iterativo de Newton-Raphson e a integração temporal aplica a técnica do  $\alpha$ -generalizado.

A abordagem do MEF adotada é baseada em coordenadas absolutas (posições), conhecida como formulação posicional do MEF (ver Coda (2018)). São considerados elementos finitos triangulares para os casos representados pelos estados planos de tensão ou de deformação, e elementos finitos tetraédricos para o caso tridimensional.

Para leituras complementares sobre o MEF posicional pode-se consultar Coda (2018) e Sanches (2022).

A fim de definir o problema da mecânica dos sólidos, além de observar a cinemática não linear desenvolvida na seção 2.1 e as equações governantes da seção 2.2, é necessário estabelecer uma relação constitutiva entre tensão e deformação. Para isso adota-se o modelo hiperelástico de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK) da seção 2.3, adequado para deformações pequenas e moderadas; bem como para materiais isotrópicos.

### 3.1 Discretização espacial por elementos finitos

Na discretização espacial no contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), o contínuo é dividido em subdomínios, denominados de elementos finitos (Coda, 2018). Nesses subdomínios, na forma tradicional do método, os campos incógnitos são aproximados por polinômios interpolados em pontos determinados, denominados nós, com o auxílio de funções base denominadas funções de forma, sendo essas associadas a cada nó. Dessa forma, a geometria,

bem como a cinemática descritas como funções contínuas em 2.1 são substituídas por uma cinemática aproximada, onde as funções analíticas são substituídas por uma combinação linear de funções de forma ponderadas por valores nodais, garantindo a continuidade por elemento e parcialmente no domínio.

Para mais detalhes sobre funções de forma no contexto do MEF posicional aplicado a sólidos recomenda-se consultar Coda (2018) e Pascon (2012).

### 3.1.1 Mudança de configuração

Empregando a abordagem isoparamétrica dos elementos finitos, adota-se um sistema adimensional auxiliar de coordenadas  $\xi$  onde são definidas as funções de forma do elemento, de forma que o mapeamento do elemento nesse espaço adimensional para a suas configurações inicial e atual são descritas em termos das funções de forma  $\phi_\gamma$  e coordenadas nodais, respectivamente por (ver figura 4):

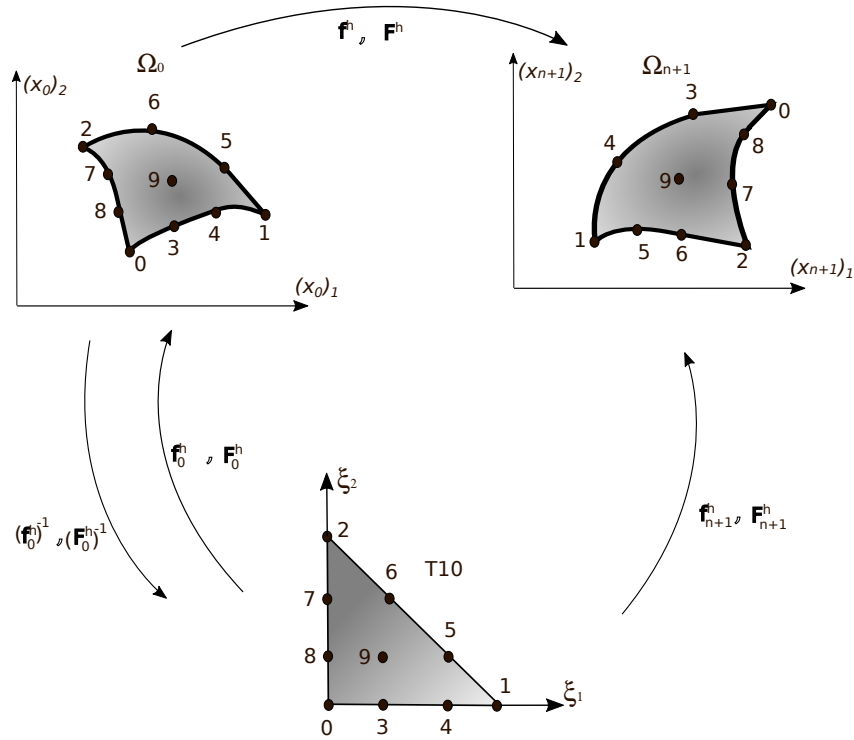
$$\mathbf{f}_0^h(\xi) = \mathbf{x}_0^h = \phi_\gamma(\xi)(\mathbf{x}_0)_\gamma \quad (3.1)$$

e

$$\mathbf{f}_{n+1}^h(\xi) = \mathbf{x}_{n+1}^h = \phi_\gamma(\xi)(\mathbf{x}_{n+1})_\gamma, \quad (3.2)$$

onde  $(\mathbf{x}_0)_\gamma$  e  $(\mathbf{x}_{n+1})_\gamma$  são os vetores de coordenada inicial e atual do nó  $\gamma$ , respectivamente; o sobrescrito  $h$  denota que a variável utilizada está na forma aproximada por interpolação de valores discretos e  $\phi_\gamma(\xi)$  representa a função de forma associada ao nó  $\gamma$ .

Figura 4 – Cinemática de um elemento finito.



Fonte: Autoria Própria.

A função mudança de configuração do problema discreto,  $f^h$ , é dada pela composição da função de mapeamento atual com a inversa da função de mapeamento inicial:

$$\mathbf{f}^h = \mathbf{f}_{n+1}^h \circ (\mathbf{f}_0^h)^{-1}. \quad (3.3)$$

A partir disso, também pode-se definir o gradiente da função mudança de configuração  $\mathbf{F}^h$  na forma discreta como:

$$\mathbf{F}^h = \nabla_0 \mathbf{f}^h = \mathbf{F}_{n+1}^h \cdot (\mathbf{F}_0^h)^{-1} \quad (3.4)$$

onde  $\nabla_0(\cdot)$  representa o operador gradiente em relação à configuração inicial, de coordenadas  $\mathbf{x}_0^h$  enquanto  $\mathbf{F}_0^h$  e  $\mathbf{F}_{n+1}^h$  são, respectivamente, os gradientes de  $\mathbf{f}_0^h$  e de  $\mathbf{f}_{n+1}^h$  em relação às coordenadas adimensionais  $\boldsymbol{\xi}$ , cujas componentes são, calculadas respectivamente por:

$$(F_0^h)_{ij} = \frac{(\partial f_0^h)_i}{\partial \xi_j} = ((x_0)_i)_\gamma \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \xi_j} \quad (3.5)$$

e

$$(F_{n+1}^h)_{ij} = \frac{(\partial f_{n+1}^h)_i}{\partial \xi_j} = ((x_{n+1})_i)_\gamma \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \xi_j}. \quad (3.6)$$

O jacobiano da mudança de configuração na forma discreta  $J^h$  pode ser calculado da seguinte maneira:

$$J^h = \frac{\det(\mathbf{F}_{n+1}^h)}{\det(\mathbf{F}_0^h)} = \frac{J_{n+1}^h}{J_0^h} \quad (3.7)$$

onde os jacobianos inicial  $J_0^h$  e atual  $J_{n+1}^h$  são dados pelos determinantes

$$J_0^h = \det(\mathbf{F}_0^h) \quad (3.8)$$

e

$$J_{n+1}^h = \det(\mathbf{F}_{n+1}^h). \quad (3.9)$$

Nota-se que tanto a geometria inicial quanto a atual podem ser genéricas e curvas, pois ambas as configurações são aproximadas pela técnica dos elementos finitos. Essa forma discreta da função mudança de configuração é o ponto fundamental para a solução das equações governantes.

### 3.1.2 Deformação de Green-Lagrange

Com a descrição da mudança de configuração na forma discreta, escreve-se o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, bem como a deformação de Green-Lagrange em qualquer ponto da discretização por elementos finitos, respectivamente por meio das equações:

$$\mathbf{C}^h = (\mathbf{F}^h)^T \cdot \mathbf{F}^h \quad (3.10)$$

e

$$\mathbf{E}^h = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^h - \mathbf{I}). \quad (3.11)$$

## 3.2 Equações governantes no problema discreto

Nesta seção, as equações governantes são obtidas a partir da aplicação do Princípio da Estacionariedade da Energia (mínima energia). Nesse sentido, é considerado um sistema fechado de tal forma que não haja variação da energia mecânica total do sistema. A aplicação desse princípio energético resulta na equação de equilíbrio dinâmico. As equações aqui obtidas são definidas no espaço discreto, configurando uma aproximação geométrica, considerando a substituição do espaço contínuo por outro espaço formado por um conjunto de elementos finitos associados a funções de forma.

### 3.2.1 Energia mecânica

A energia mecânica total do sistema leva em consideração as principais parcelas para a descrição do modelo físico e em função da correspondência com os resultados experimentais, essas parcelas podem ser incrementadas e enriquecidas com modelos mais robustos. Para a descrição mecânica de um sólido deformável são consideradas as parcelas de energia potencial externa, energia de deformação e energia cinética como consta na equação:

$$\Pi^h = \Pi_{ext}^h + \Pi_{\varepsilon}^h + \Pi_{cin}^h. \quad (3.12)$$

A parcela de energia potencial externa que atua sobre o sólido representa o potencial de realizar trabalho das forças externas, sendo dada por:

$$\Pi_{ext}^h = - \sum \mathbf{Q}_p \cdot \mathbf{x}_{n+1}^h - \int_{\Gamma_0^h} \mathbf{f}_0^{sup} \cdot \mathbf{x}_{n+1}^h d\Gamma_0^h - \int_{\Omega_0^h} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{x}_{n+1}^h d\Omega_0^h, \quad (3.13)$$

a parcela de energia de deformação do sólido é a energia potencial elástica dada pela expressão:

$$\Pi_\varepsilon^h = \int_{\Omega_0^h} \Psi^h d\Omega_0^h \quad (3.14)$$

e a parcela de energia cinética das partículas do sólido é calculada como:

$$\Pi_{cin}^h = \int_{\Omega_0^h} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{x}}_{n+1}^h \cdot \dot{\mathbf{x}}_{n+1}^h d\Omega_0^h. \quad (3.15)$$

Onde  $\mathbf{x}_{n+1}^h$  refere-se ao campo de posições atuais da geometria aproximada;  $\mathbf{f}_0^{sup}$  é o campo de forças de superfície;  $\mathbf{b}_0$  é o campo de forças de domínio que atuam na configuração inicial;  $\Psi^h$  é a energia específica de deformação já em função das variáveis aproximadas;  $\rho_0$  é massa específica inicial e  $\dot{\mathbf{x}}_{n+1}^h$  é o campo de velocidades atuais da geometria discretizada.

Nota-se que essas expressões fazem uso da conservação da massa e do potencial de forças externas. Além disso, as equações são integradas na geometria discretizada por elementos finitos  $\Omega_0 \rightarrow \Omega_0^h$  e  $\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0^h$ , de tal forma que as forças externas pontuais  $\mathbf{Q}_p$  são compatíveis com o modelo desenvolvido.

Calculando a primeira variação de cada parcela do funcional de energia mecânica pode-se chegar às equações

$$\delta \Pi_{ext}^h = - \sum \mathbf{Q}_p \cdot \delta \mathbf{x}_{n+1}^h - \int_{\Gamma_0^h} \mathbf{f}_0^{sup} \cdot \delta \mathbf{x}_{n+1}^h d\Gamma_0^h - \int_{\Omega_0^h} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{x}_{n+1}^h d\Omega_0^h, \quad (3.16)$$

$$\delta \Pi_\varepsilon^h = \int_{\Omega_0^h} \delta \Psi^h d\Omega_0^h = \int_{\Omega_0^h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial \mathbf{E}^h} : \delta \mathbf{E}^h d\Omega_0^h = \int_{\Omega_0^h} \mathbf{S}^h : \delta \mathbf{E}^h d\Omega_0^h \quad (3.17)$$

e

$$\delta \Pi_{cin}^h = \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^h \cdot \delta \mathbf{x}_{n+1}^h d\Omega_0^h. \quad (3.18)$$

Em particular, nota-se que para a equação (3.17) é importante lembrar que  $\Psi^h = \Psi^h(\mathbf{E}^h)$  e  $\mathbf{S}^h = \frac{\partial \Psi^h}{\partial \mathbf{E}^h}$ . Observa-se também que, no desenvolvimento da equação (3.18), faz-se o uso da conservação da massa e seu colorário (para mais detalhes recomenda-se consultar Coda (2018)).

### 3.2.2 Equilíbrio

Destaca-se que as análises desenvolvidas a seguir são realizadas no espaço aproximado pelas funções de forma  $\Omega^h$ , onde o índice  $h$  denota a aproximação por elementos finitos.

Pelo princípio da conservação da energia, a primeira variação do funcional de energia total deve resultar nula, ou seja:

$$\begin{aligned} \delta \Pi^h = 0 = & - \sum \mathbf{Q}_p \cdot \delta \mathbf{x}_{n+1}^h - \int_{\Gamma_0^h} \mathbf{f}_0^{sup} \cdot \delta \mathbf{x}_{n+1}^h d\Gamma_0^h - \int_{\Omega_0^h} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{x}_{n+1}^h d\Omega_0^h + \\ & + \int_{\Omega_0^h} \mathbf{S}^h : \delta \mathbf{E}^h d\Omega_0^h + \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^h \cdot \delta \mathbf{x}_{n+1}^h d\Omega_0^h. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Levando-se em conta que a variação de uma grandeza pode ser calculada em função de sua derivada como  $\delta(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{X}} \delta \mathbf{X}$ . Para simplificar as derivadas que surgem, utiliza-se a descrição da geometria interpolada a qual é dada por  $(\mathbf{x}_{n+1}^h)_i = \phi_\gamma(X_{n+1})_{i\gamma}$  em termos indiciais para as componentes ou  $\mathbf{x}_{n+1}^h = \phi \cdot \mathbf{X}_{n+1}$  em termos simbólicos; e sua derivada em termos das posições

nodais é dada por  $\frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} = \boldsymbol{\phi}$ . E pela arbitrariedade de  $\delta \mathbf{X}$  chega-se na equação de equilíbrio dinâmico em descrição semi-discreta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^h}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} = \mathbf{0} = & - \sum \mathbf{Q}_p \cdot \boldsymbol{\phi} - \int_{\Gamma_0^h} \mathbf{f}_0^{sup} \cdot \boldsymbol{\phi} d\Gamma_0^h - \int_{\Omega_0^h} \mathbf{b}_0 \cdot \boldsymbol{\phi} d\Omega_0^h + \\ & \int_{\Omega_0^h} \mathbf{S}^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} d\Omega_0^h + \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^h \cdot \boldsymbol{\phi} d\Omega_0^h. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Os termos dessa equação podem ser organizados em termos de forças externas, internas de deformação e inerciais como expressam as equações seguintes:

$$\mathbf{Q}_{ext}^h = - \sum \mathbf{Q}_p \cdot \boldsymbol{\phi} - \int_{\Gamma_0^h} \mathbf{f}_0^{sup} \cdot \boldsymbol{\phi} d\Gamma_0^h - \int_{\Omega_0^h} \mathbf{b}_0 \cdot \boldsymbol{\phi} d\Omega_0^h, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{Q}_{int}^h = \int_{\Omega_0^h} \mathbf{S}^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} d\Omega_0^h \quad (3.22)$$

e

$$\mathbf{Q}_{iner}^h = \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^h \cdot \boldsymbol{\phi} d\Omega_0^h. \quad (3.23)$$

Substituindo essas expressões em (3.20) chega-se em um equilíbrio de forças nodais:

$$-\mathbf{Q}_{ext}^h + \mathbf{Q}_{int}^h + \mathbf{Q}_{iner}^h = \mathbf{0}, \quad (3.24)$$

que representam um sistema de equações não lineares. Destaca-se que esse sistema já tem incorporado as discretizações espaciais, sendo denominado de sistema de equações semi-discretas. Além disso, ressalta-se que o sistema de equações (3.24) informa apenas resultados nodais, os quais são posteriormente interpolados, por elemento no pós-processamento, permitindo dessa forma o conhecimento aproximado dos resultados para todos os pontos do domínio.

### 3.3 Integração numérica

O sistema de equações não lineares da equação (3.20) apresenta integrais definidas no domínio espacial da configuração inicial dos elementos finitos além de derivadas temporais materiais. Levando em consideração que na configuração a malha pode ser não estruturada com elementos apresentando formas curvas definidas pelas funções de forma (elementos isoparamétricos), a integração numérica torna-se fundamental, tanto no espaço como no tempo, antes de solucionar o sistema de equações (3.24).

As integrais no espaço são resolvidas por meio de regras de quadratura numérica, enquanto uma técnica de "marcha no tempo" é empregada para realizar a integração temporal entre dois instantes.

### 3.3.1 Integração numérica no espaço

As regras de quadratura permitem realizar as integrais do sistema de equações (3.20) em termos numéricos, transformando a integral de uma função  $\mathfrak{F}(\mathbf{x})$  na soma ponderada de seus valores definidos em um número finito de pontos discretos, tal que:

$$\int_{\Omega_0^h} \mathfrak{F}(\mathbf{x}) d\Omega_0^h = \sum_{i=1}^{np} \mathfrak{F}(\mathbf{x}(\xi_{(i)})) J_0(\xi_{(i)}) w_{(i)}. \quad (3.25)$$

Onde  $np$  refere-se ao número de pontos de integração;  $\mathbf{x}(\xi_{(i)})$  denota o cálculo da posição em função das coordenadas adimensionais no ponto de integração;  $J_0(\xi_{(i)})$  é o termo jacobiano da transformação do domínio auxiliar, no espaço adimensional, para o domínio inicial do elemento, calculado no ponto de integração; e  $w_{(i)}$  é o peso associado ao ponto de integração  $i$ .

As regras de quadratura numérica definem as coordenadas adimensionais e os pesos para cada ponto da integração e para cada tipo de elemento. Neste trabalho, para elementos de linha, quadrangulares e paralelepípedos, utilizam-se pontos e pesos de Gauss; para superfícies aproximadas por elementos finitos triangulares utilizam-se pontos e pesos de Hammer, e para domínios aproximados por elementos tetraédricos aplicam-se pontos e pesos de Hammer 3D. Em Pascon (2012) encontram-se valores tabelados para as coordenadas adimensionais e os pesos dos pontos de integração tanto para quadraturas de Gauss quanto de Hammer.

Por fim, nota-se que após a integração espacial da equação (3.20), essa é transformada em um sistema não linear de equações diferenciais ordinárias, com variáveis contínuas no tempo.

### 3.3.2 Integração numérica temporal

Em problemas dinâmicos, a variável temporal também deve ser discretizada. Esse processo pode ser feito também pela técnica de elementos finitos, utilizando elementos finitos 3D para problemas planos e elementos finitos 4D para problemas tridimensionais no espaço. Essa técnica é conhecida como Método dos Elementos Finitos Espaço-Tempo e permite a obtenção de resultados robustos em análise dinâmica não linear, como pode ser visto em Lopes (2023).

Contudo, as técnicas baseadas em marcha no tempo são mais simples e apresentam custo computacional inferior com bons resultados, mesmo quando aplicadas a problemas com não linearidades.

Como exemplos de métodos de marcha no tempo, é possível citar os integradores temporais de Newmark- $\beta$  e  $\alpha$ -generalizado. Ambos podem apresentar estabilidade incondicional e ordem de precisão 2, no entanto, em problemas não lineares, especialmente para o integrador de Newmark- $\beta$ , é necessário tomar cuidado com problemas numéricos decorrentes das altas frequências presentes no problema.

O integrador  $\alpha$ -generalizado permite um maior controle numérico em problemas dinâmicos, quando comparado ao Newmark- $\beta$ , apresentando parâmetros que permitem filtrar a

dissipação das altas frequências de forma ótima.

O método  $\alpha$ -generalizado, proposto por Chung e Hulbert (1993), foi desenvolvido inicialmente para aplicações em dinâmica das estruturas. Nota-se que essa técnica de integração utiliza por base o integrador Newmark- $\beta$ , contudo desenvolve a equação de equilíbrio dinâmico (3.24) em termos de um tempo intermediário  $\alpha_f$  entre o último instante equilibrado  $t_n$  e o atual  $t_{n+1}$ , tal que:

$$-\mathbf{Q}_{n+\alpha_f}^{ext} + \mathbf{Q}_{n+\alpha_f}^{int} + \mathbf{Q}_{n+\alpha_m}^{iner} + \mathbf{Q}_{n+\alpha_f}^{visc} = \mathbf{0}. \quad (3.26)$$

Consideram-se as forças inerciais defasadas em relação às demais, definindo-as em um instante  $t_{n+\alpha_m}$ . Isso permite a imposição de uma dissipação das altas frequências de vibração de forma controlada, preservando as baixas frequências com mínima dissipação numérica. Além disso, incrementa-se um termo referente às forças de amortecimento viscosas  $\mathbf{Q}^{visc}$  na equação de equilíbrio global, seguindo o mesmo procedimento de Coda (2018).

Os termos de forças externas e internas são definidos em tempos intermediários  $t_{n+\alpha_f}$  no método  $\alpha$ -generalizado, apesar disso são calculados em termos dos valores dos passos  $n$  e  $n + 1$ , conforme exposto em:

$$\mathbf{Q}_{n+\alpha_f} = \mathbf{Q}_n + \alpha_f(\mathbf{Q}_{n+1} - \mathbf{Q}_n). \quad (3.27)$$

O termo de força inercial é definido no instante defasado  $t_{n+\alpha_m}$  no método  $\alpha$ -generalizado, sendo também calculados em termos dos valores dos passos  $n$  e  $n + 1$ , conforme segue:

$$\mathbf{Q}_{n+\alpha_m}^{iner} = \mathbf{Q}_n^{iner} + \alpha_m(\mathbf{Q}_{n+1}^{iner} - \mathbf{Q}_n^{iner}). \quad (3.28)$$

De forma equivalente pode-se explicitar as aproximação das posições, velocidades e acelerações para o  $\alpha$ -generalizado pelas equações

$$\mathbf{X}_{n+\alpha_f} = \mathbf{X}_n + \alpha_f(\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n), \quad (3.29)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{n+\alpha_f} = \dot{\mathbf{X}}_n + \alpha_f(\dot{\mathbf{X}}_{n+1} - \dot{\mathbf{X}}_n) \quad (3.30)$$

e

$$\ddot{\mathbf{X}}_{n+\alpha_m} = \ddot{\mathbf{X}}_n + \alpha_m(\ddot{\mathbf{X}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{X}}_n). \quad (3.31)$$

Destaca-se que as aproximações do integrador  $\alpha$ -generalizado recaem na variável incógnita, ou seja, na posição atual e as suas derivadas em  $n$  e  $n + 1$ . Os termos do último passo equilibrado  $n$  são sempre conhecidos, inclusive no primeiro passo, onde são dados pelas condições iniciais do problema dinâmico. Já para os termos no passo  $n + 1$  utiliza-se as aproximações do método de Newmark- $\beta$  para discretizar as derivadas temporais. Nota-se que a variável incógnita é a posição atual e a partir dela pode-se calcular a velocidade e a aceleração atual pelas equações:

$$\dot{\mathbf{X}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{R}_n - \gamma\Delta t\mathbf{Q}_n \quad (3.32)$$

e

$$\ddot{\mathbf{X}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{X}_{n+1} - \mathcal{Q}_n. \quad (3.33)$$

Onde  $\mathbf{R}_n = \dot{\mathbf{X}}_n + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{X}}_n$  e  $\mathcal{Q}_n = \frac{\mathbf{x}_n}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{x}}_n}{\beta \Delta t} + (\frac{1}{2\beta} - 1)\ddot{\mathbf{X}}_n$  são termos que agrupam valores do passo anterior.

Os parâmetros  $\alpha_f$  e  $\alpha_m$  são escritos em função de um raio espectral  $\rho_\infty$  e para os problemas de elasticidade são dados por (ver Chung e Hulbert (1993)):

$$\alpha_f = \frac{\rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \quad (3.34)$$

e

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{1 + \rho_\infty}. \quad (3.35)$$

O parâmetro espectral  $\rho_\infty$  permite controlar o nível de dissipação numérica e para que o método seja incondicionalmente estável a relação

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq \frac{1}{2} \quad (3.36)$$

deve ser satisfeita. Os parâmetros livres de Newmark- $\beta$  ( $\beta, \gamma$ ) também podem ser expressos em termos do raio espectral como em:

$$\beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha_m - \alpha_f)^2 \quad (3.37)$$

e

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_m - \alpha_f. \quad (3.38)$$

Isso permite condensar os quatro parâmetros  $\alpha_f, \alpha_m, \beta, \gamma$  em termos de um único  $\rho_\infty$ . Quando  $\rho_\infty = 0$  a dissipação numérica é máxima e o modelo permite a anulação completa das altas frequências; sendo  $\rho_\infty = 1$  para a dissipação mínima.

Por fim, destaca-se que com a aproximação temporal, as equações governantes ficam discretizadas agora no espaço e no tempo; formando um sistema totalmente discreto de equações não lineares.

### 3.4 Técnica de solução numérica do sistema não linear

No capítulo 2 foi apresentada a equação contínua de equilíbrio dinâmico, a qual constitui uma equação diferencial parcial (EDP) não linear em termos de posições. Aplicando a aproximação por elementos finitos para a geometria (ver 3.1) em conjunto com a integração por quadratura (ver 3.3.1) transforma-se uma EPD não linear em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs), representando um sistema semi-discreto.

Aplicando a discretização temporal apresentada em 3.3.2 ao sistema de EDOs, obtém-se um sistema de equações algébricas não lineares. Destaca-se que a não linearidade desse sistema de equações se deve à consideração de uma cinemática que busca o equilíbrio na configuração deformada.

Nesse sentido, para a solução do sistema não linear algébrico utiliza-se do Método de Newton-Raphson. Essa técnica consiste basicamente em escrever a equação de equilíbrio em termos de uma função resíduo, expandi-la em série de Taylor e desprezar os termos de ordem superior a fim de que se tenha um sistema linear de equações algébricas para cada iteração. Esse processo iterativo segue até que se anule o resíduo ou seja atingido um limite de tolerância para a sua norma.

### 3.4.1 Processo de Newton-Raphson e resíduo numérico

Substituindo as aproximações temporais na equação de equilíbrio no passo intermediário (3.26) chega-se na equação:

$$\mathbf{r}_{mov}(\mathbf{X}_{n+1}) = \alpha_f(\mathbf{Q}_{n+1}^{int} - \mathbf{Q}_{n+1}^{ext}) + \left( \frac{\alpha_m \mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\alpha_f \gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \right) \cdot \mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{P}_n = \mathbf{0} \quad (3.39)$$

que apresenta a definição do resíduo numérico do sistema não linear, o qual deve ser nulo na convergência. Esse termo também pode ser denominado de desbalanceamento mecânico (Coda, 2018), por representar o resíduo da equação de quantidade de movimento. Onde  $\mathbf{M}$  denota a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  a matriz de amortecimento viscoso, e  $\mathbf{P}_n$  um termo que agrupa as variáveis do passo anterior.

A matriz de massa é dada pela equação

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \boldsymbol{\phi} \otimes \boldsymbol{\phi} d\Omega_0^h. \quad (3.40)$$

O modelo de amortecimento adotado aqui é o modelo numérico de Rayleigh, que considera a matriz de amortecimento como uma combinação linear entre as matrizes de massa  $\mathbf{M}$  e de rigidez elástica  $\mathbf{H}^{est}$ :

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{H}^{est}. \quad (3.41)$$

Onde esses parâmetros da combinação podem ser escritos em termos da frequência natural de vibração  $\omega_n$  e de um coeficiente de amortecimento da estrutura  $\xi^{visc}$  como em  $a_0 = 2\omega_n \xi^{visc}$  e  $a_1 = \frac{2\xi^{visc}}{\omega_n}$ ; formulações semelhantes com o amortecimento de Rayleigh podem ser vistas em Cruz e Miranda (2017). Para descrições mais robustas de comportamento viscoso, recomenda-se consultar Carvalho (2019) e Hayashi (2024).

O termo  $\mathbf{P}_n$ , que agrupa termos que não dependem da configuração atual, é dado pela equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n = & (1 - \alpha_f)(\mathbf{Q}_n^{int} - \mathbf{Q}_n^{ext}) + (1 - \alpha_m)\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_n + (1 - \alpha_f)\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{X}}_n \\ & + (-\alpha_m \mathbf{M} - \alpha_f \gamma \Delta t \mathbf{C}) \cdot \mathbf{Q}_n + \alpha_f \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}_n. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Expandindo (3.39) por série de Taylor resulta na equação:

$$\mathbf{r}_{mov}(\mathbf{X}_{n+1}) = \mathbf{r}_{mov}((\mathbf{X}_{n+1})_k) + \frac{\partial \mathbf{r}_{mov}((\mathbf{X}_{n+1})_k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \cdot \Delta \mathbf{X}_k + \dots = \mathbf{0}. \quad (3.43)$$

Desprezando os termos de ordem superior da equação (3.43) obtém-se um sistema linear

para a primeira iteração do processo de Newton-Raphson:

$$\mathbf{r}_{mov}((\mathbf{X}_{n+1})_k) + \frac{\partial \mathbf{r}_{mov}((\mathbf{X}_{n+1})_k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \cdot \Delta \mathbf{X}_k = \mathbf{r}_{mov}((\mathbf{X}_{n+1})_k) + \mathbf{H}_k((\mathbf{X}_{n+1})_k) \cdot \Delta \mathbf{X}_k \approx \mathbf{0}. \quad (3.44)$$

Esse sistema pode ser resolvido implicitamente para  $\Delta \mathbf{X}$  por algum solucionador direto ou iterativo. De forma alternativa, o sistema pode ser resolvido de forma explícita para  $\Delta \mathbf{X}$  pela inversão da matriz tangente como em:

$$\Delta \mathbf{X}_k = -(\mathbf{H}_k)^{-1} \cdot (\mathbf{r}_{mov})_k. \quad (3.45)$$

Onde  $\mathbf{H}_k$  refere-se à matriz tangente ou também denominada de matriz hessiana do sistema e avaliada na posição atual tentativa do processo iterativo;  $(\mathbf{X}_{n+1})_k$  é a posição atual da iteração  $k$  do processo de Newton-Raphson;  $\Delta \mathbf{X}_k$  é a correção da posição atual para a  $k$ -ésima iteração.

Após o cálculo do incremento  $\Delta \mathbf{X}_k$  realiza-se a correção da posição da  $k$ -ésima iteração e calcula-se as posições para a iteração  $k + 1$ , conforme a equação

$$(\mathbf{X}_{n+1})_{k+1} = (\mathbf{X}_{n+1})_k + \Delta \mathbf{X}_k. \quad (3.46)$$

### 3.4.2 Matriz tangente

A matriz  $\mathbf{H}$  que aparece na expansão em série de Taylor do resíduo mecânico refere-se, em se tratando da energia mecânica, à matriz hessiana do problema; que em termos do resíduo da equação do movimento refere-se à matriz tangente do problema dinâmico. Considerando o integrador  $\alpha$ -generalizado, a matriz tangente pode ser escrita como:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{r}_{mov}}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{X}_{n+1} \otimes \partial \mathbf{X}_{n+1}} = \alpha_f \mathbf{H}^{est} + \frac{\alpha_m \mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\alpha_f \gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t}. \quad (3.47)$$

Onde a matriz tangente estática não linear  $\mathbf{H}^{est}$  é dada pela equação:

$$\mathbf{H}^{est} = \int_{\Omega_0^h} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} : \mathfrak{C} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{X}_{n+1} \otimes \partial \mathbf{X}_{n+1}} \right) d\Omega_0^h. \quad (3.48)$$

## 3.5 Condições de contorno e valores iniciais

Em um problema de dinâmica dos sólidos podem ser aplicadas de forma direta condições de contorno de Dirichlet e de Neumann. Devido à características dinâmica do problema, condições iniciais também podem ser definidas de forma natural. Em Kishino (2022b) e Kishino (2022a) encontram-se exemplos de problemas com condições de contorno de Dirichlet, Neumann e valores iniciais com o MEF posicional.

### 3.5.1 Condições de contorno

Em um sólido qualquer discretizado com elementos finitos podem haver contornos com condições de Neumann  $\Gamma^N$  e com condições de Dirichlet  $\Gamma^D$ . No primeiro caso, atuam forças de superfície, distribuídas e pontuais. Essas forças são denominadas externas e podem ser aplicadas a partir de uma função analítica conhecida ou também podem ser aproximadas a partir da interpolação dos seus valores nodais por meio das funções de forma. A integração das forças de superfície, para o cálculo do vetor de forças externas nodais equivalentes, leva em consideração a geometria 2D ou 1D da superfície, isso conduz a uma quadratura diferente das integrais de domínio. O termo jacobiano da transformação de espaços no caso de superfícies é função da norma do vetor normal à superfície e no caso de contornos 1D é função da norma do vetor tangente paramétrico.

Em se tratando das condições de Dirichlet, em  $\Gamma^D$ , valores de posições são impostos, podendo representar diferentes condições de apoio conhecidas: recalque do solo; defeito de fabricação; e imposição de deslocamento ou movimento prescrito.

### 3.5.2 Condições iniciais

Nos problemas dinâmicos também é necessário o conhecimento das condições iniciais, em velocidades e acelerações. A aplicação dessas condições é levada em consideração no integrador temporal  $\alpha$ -generalizado para iniciar o processo de solução. Dadas as velocidades e forças no instante inicial, as acelerações podem ser calculadas resolvendo-se a equação  $\ddot{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{Q}_0^{ext} - \mathbf{Q}_0^{int} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_0]$ .

Para os demais passos de tempo, as velocidades e acelerações são calculadas a partir das equações do integrador temporal (ver (3.32) e (3.33)) e aplicadas como condições iniciais para o próximo passo de tempo.

Tais condições iniciais podem ser utilizadas para a simulação de um lançamento de projétil, da trajetória de um foguete ou de um pêndulo com velocidade inicial; bem como para continuar uma simulação de um problema dinâmico a partir dos dados do último instante de tempo.

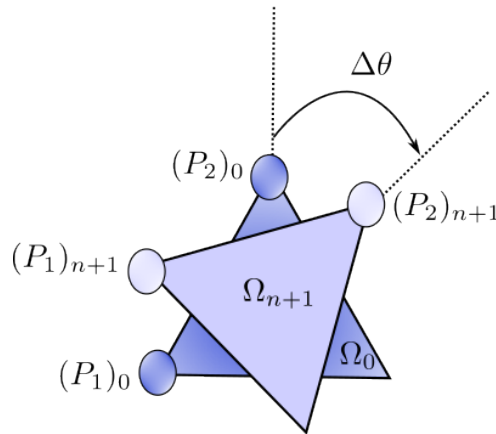
### 3.5.3 Mola de torção para problemas bidimensionais

O acoplamento entre mola de torção e um sólido bidimensional é particularmente útil para análises de estruturas com apoios elásticos resistentes à rotação, além disso permite a análise aproximada, de estruturas tridimensionais assimétricas no plano, devido a consideração da rigidez externa ao domínio 2D. Essa estrutura assimétrica, pode ser, por exemplo, uma viga conectada em uma chapa por solda.

Nota-se que a compatibilidade entre rotações e posições representa um desafio devido aos diferentes parâmetros nodais, não sendo possível realizar uma simples contribuição nodal por elemento, como ocorre na situação de molas de translação.

Nesse sentido, propõe-se um elemento finito de chapa rígido para acoplar rotações e coordenadas absolutas (ver Figura 5). Um elemento de sólido 2D tradicional possui indefinidas rotações, contudo o elemento proposto possui rigidez elevada, permitindo considerar que o mesmo apresente apenas rotação de corpo rígido. Nota-se que ao adotar uma rigidez elevada, mantendo-se a lei constitutiva elástica, torna a técnica equivalente a uma formulação baseada em penalização.

Figura 5 – Elemento rígido para acoplamento de mola de torção com MEF posicional.



Fonte: Autoria Própria.

Nesse contexto, é possível relacionar a rotação desse elemento com as coordenadas globais de dois de seus nós. Utilizando as notações  $\mathbf{X}_{n+1}$  para as coordenadas atuais e  $\mathbf{X}_0$  para as coordenadas iniciais;  $(X_0)_{ij}$  = denota a componente da posição inicial na direção  $i$  do nó referente ao ponto  $P_j$  (ver Figura 5);  $(X_{n+1})_{ij}$  = denota a componente da posição atual na direção  $i$  do nó referente ao ponto  $P_j$  (ver Figura 5). Aplicando essa notação chega-se às equações:

$$\Delta\theta(\mathbf{X}_{n+1}) = \tan^{-1} \left[ \frac{(X_{n+1})_{22} - (X_{n+1})_{21}}{(X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11}} \right] - \tan^{-1} \left[ \frac{(X_0)_{22} - (X_0)_{21}}{(X_0)_{12} - (X_0)_{11}} \right] \quad (3.49)$$

e

$$U_{mola} = \frac{1}{2} k_\theta \Delta\theta^2. \quad (3.50)$$

Onde  $\Delta\theta(\mathbf{X}_{n+1})$  refere-se à variação angular do elemento rígido em função de sua posição atual  $\mathbf{X}_{n+1}$ . A parcela de energia elástica da mola é dada por  $U_{mola}$ , onde  $k_\theta$  refere-se à rigidez de torção da mola e a variação angular  $\Delta\theta$  pode agora ser relacionada a variações de posições no sólido bidimensional.

Os elementos ficam monoliticamente acoplados por meio do incremento dessa parcela de energia de deformação elástica no potencial de energia total do sistema. Nesse sentido, basta calcular as variações em termos de posições dessa nova parcela do sistema. A equação

$$\frac{\partial U_{mola}}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} = \frac{\partial U_{mola}}{\partial \Delta\theta} \frac{\partial \Delta\theta}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \quad (3.51)$$

apresenta o incremento na equação de equilíbrio (ou primeira variação da energia total). A equação

$$\frac{\partial^2 U_{mola}}{\partial \mathbf{X}_{n+1} \otimes \mathbf{X}_{n+1}} = \frac{\partial^2 U_{mola}}{\partial^2 \Delta\theta} \frac{\partial \Delta\theta}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \otimes \frac{\partial \Delta\theta}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} + \frac{\partial U_{mola}}{\partial \Delta\theta} \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial \mathbf{X}_{n+1} \otimes \mathbf{X}_{n+1}} \quad (3.52)$$

descreve o incremento na matriz tangente do sistema (ou segunda variação da energia total). As equações

$$\frac{\partial U_{mola}}{\partial \Delta\theta} = k_\theta \Delta\theta, \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial^2 U_{mola}}{\partial^2 \Delta\theta} = k_\theta, \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \Delta\theta}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} = \begin{bmatrix} \frac{(X_{n+1})_{22} - (X_{n+1})_{21}}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^2} \\ \frac{(X_{n+1})_{21} - (X_{n+1})_{22}}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^2} \\ \frac{-1}{(X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11}} \\ \frac{1}{(X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11}} \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

e

$$\frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial \mathbf{X}_{n+1} \otimes \mathbf{X}_{n+1}} = \begin{bmatrix} \frac{2((X_{n+1})_{22} - (X_{n+1})_{21})}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^3} & \frac{-2((X_{n+1})_{22} - (X_{n+1})_{21})}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^3} & \frac{-1}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^2} & \frac{1}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^2} \\ \frac{-2((X_{n+1})_{22} - (X_{n+1})_{21})}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^3} & \frac{2((X_{n+1})_{22} - (X_{n+1})_{21})}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^3} & \frac{1}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^2} & \frac{-1}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^2} \\ \frac{-1}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^2} & \frac{1}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^2} & \frac{-1}{((X_{n+1})_{12} - (X_{n+1})_{11})^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

apresentam os cálculos dos termos das equações 3.51 e 3.52, linearizados para pequenas rotações.

### 3.6 Exemplos de verificação

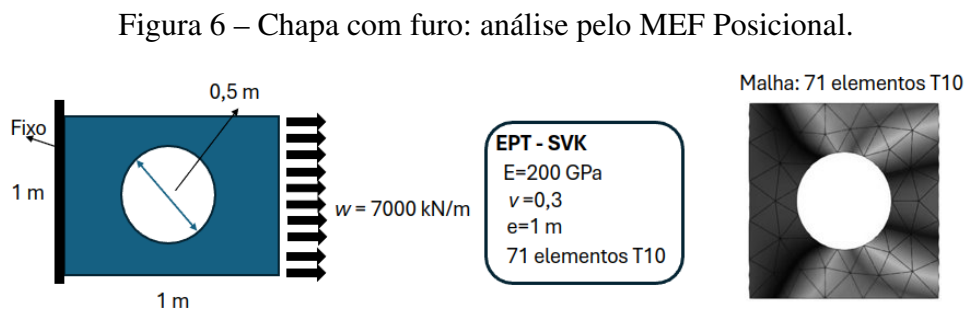
Esta seção apresenta exemplos numéricos em dinâmica não linear de sólidos utilizando a formulação posicional do Método dos Elementos Finitos. Os resultados obtidos são comparados com trabalhos da literatura.

Esta seção apresenta exemplos numéricos obtidos por meio da formulação apresentada. Destaca-se que a descrição posicional da dinâmica dos sólidos já é bem conhecida, tendo sido validada e suas características numéricas estudadas em diversos trabalhos. Destaca-se a proposta de vínculos de mola de torção da forma apresentada neste trabalho é original e não foi encontrada na literatura; nota-se que a técnica ainda é introdutória e se limita a problemas bidimensionais, podendo ser estendida para problemas tridimensionais em trabalhos futuros. Os exemplos apresentados objetivam ilustrar o emprego da formulação lagrangiana total baseada em posições para sólidos e verificar qualitativamente o código implementado com a técnica para

introdução dos vínculos de mola de torção.

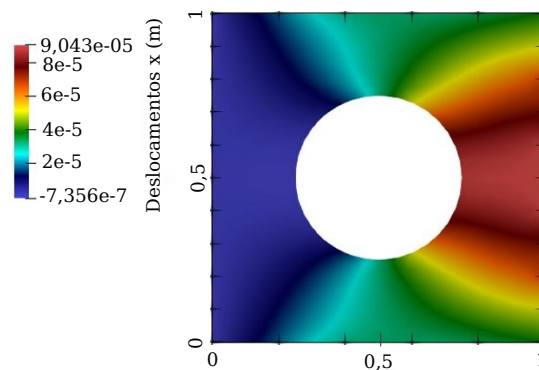
### 3.6.1 Chapa com furo sob carregamento estático

A fim de verificar a captura de resultados estáticos, simula-se uma chapa com furo, sendo engastada à esquerda e tracionada por uma força distribuída uniforme à direita conforme ilustrado na figura 6. São utilizados 71 elementos finitos triangulares de aproximação cúbica (T10) e de Estado Plano de Tensão. O módulo de elasticidade adotado é de  $E = 200$  GPa, o coeficiente de poisson é de  $\nu = 0,3$  e o carregamento aplicado é de  $7000$  kN/m. A chapa possui dimensões de  $1$  m x  $1$  m e o furo tem diâmetro de  $0,5$  m.



A Figura 7 apresenta o resultado obtido pelo MEF Posicional. Na modelagem pelo Ansys foram utilizados 760 elementos triangulares de EPT, de aproximação quadrática (T6) e pelo material *Structural Steel*. A comparação da componente horizontal de deslocamento máxima do presente trabalho com a solução obtida por meio do programa Ansys apresenta correspondência de 97%.

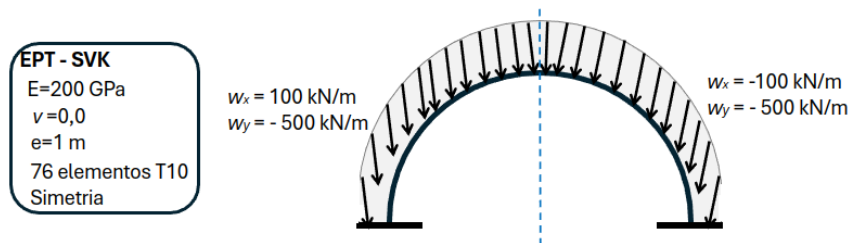
Figura 7 – Chapa com furo: resultados para o campo de deslocamentos.



### 3.6.2 Arco com força distribuída estática

Este exemplo, ilustrado na Figura 8, consiste em um arco com força distribuída estaticamente aplicada no contorno externo de componentes  $w_x = -100$  kN/m,  $w_y = -500$  kN/m, para o lado direito; e componentes  $w_x = 100$  kN/m,  $w_y = -500$  kN/m, para o lado esquerdo; conforme ilustra a Figura 8. O módulo de elasticidade adotado é de  $E = 200$  GPa, o coeficiente de Poisson é considerado nulo e o arco é discretizado em 76 elementos triangulares de aproximação cúbica, adotando-se EPT. A quantidade de elementos é referente à malha na geometria considerando a condição de simetria.

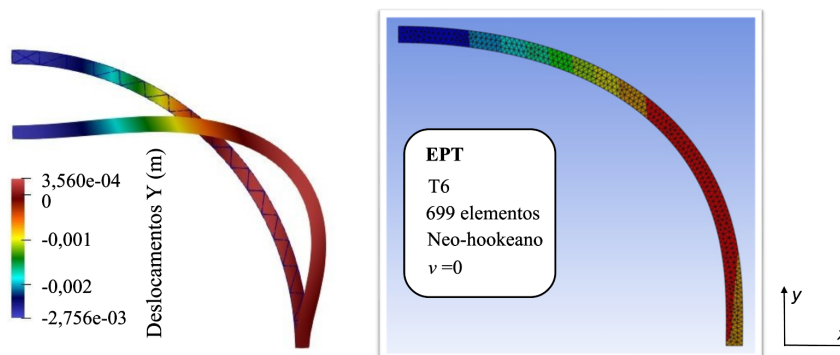
Figura 8 – Arco: geometria e forças de superfície.



Fonte: Autoria Própria.

Para fins de comparação, este exemplo foi simulado no Ansys, adotando-se 699 elementos triangulares de aproximação quadrática e material *Neo-hookeano* de EPT. Destaca-se que no contexto de pequenos deslocamentos, os modelos *Neo-hookeano* e *Saint-Venant-Kirchhoff* são equivalentes, convergindo para a solução linear do Hooke generalizado. As distribuições da componente vertical de deslocamento obtidas pela formulação posicional e pelo Ansys, são comparadas na Figura 9. O resultado para o deslocamento vertical máximo apresenta correspondência de 98% com o Ansys.

Figura 9 – Arco: resultados para o campo de deslocamentos.



Fonte: Autoria Própria.

### 3.6.3 Viga com mola de torção

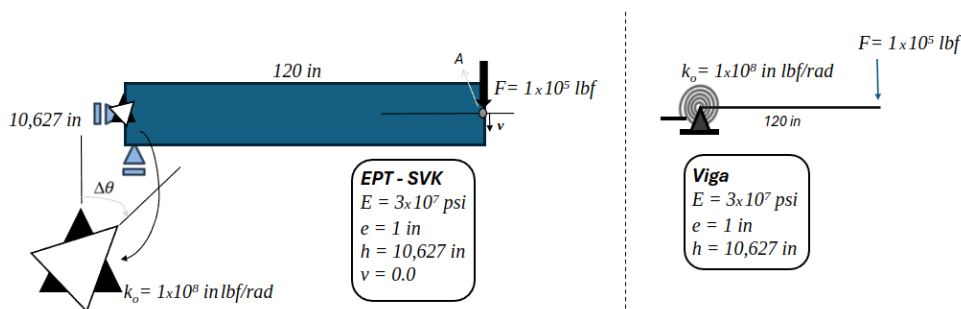
Este exemplo trata-se de uma viga com apoio do segundo gênero à esquerda e uma mola de torção no mesmo ponto (ver Figura 10). Na extremidade direita aplica-se uma força pontual de  $10^5$  lbf no centro da altura da viga. O módulo de elasticidade é de  $E = 3 \cdot 10^7$  psi; o coeficiente de poisson  $\nu$  é nulo; a altura da viga é de  $h = 10,627$  in; a largura da viga  $e$  é considerada unitária; e a mola de torção possui rigidez de  $k_\theta = 10^8$  lbf.in/rad.

Nota-se que esse problema é facilmente modelado por uma descrição cinemática com parâmetros nodais de rotação, como a viga de Euler-Bernoulli (ver modelo de viga para este problema também na Figura 10). Contudo, no âmbito da formulação posicional para sólidos, a rotação não é um parâmetro nodal; representando um desafio a modelagem de tal acoplamento no contexto da descrição posicional de sólidos. Para isso, propõe-se um elemento rígido no interior do domínio de EPT do sólido para compatibilizar os giros com as variações no campo de posições da chapa, permitindo a consideração da energia de distorção por meio dessa abordagem.

Nesse contexto, este exemplo ilustra o acoplamento entre elementos finitos com diferentes variáveis nodais, sem acrescentar graus de liberdade ao sistema global, pois a energia de distorção da mola é transferida para as posições nodais do elemento rígido.

A fim de verificar a implementação dessa acoplamento, considera-se uma viga com uma mola de giro na extremidade (ver Figura 10). A viga é modelada com elementos finitos de chapa, enquanto o giro é considerado conforme descrito na seção 3.5.3. Comparando o deslocamento vertical máximo no ponto A com um resultado analítico linear observa-se a correspondência de 95% com a malha utilizada.

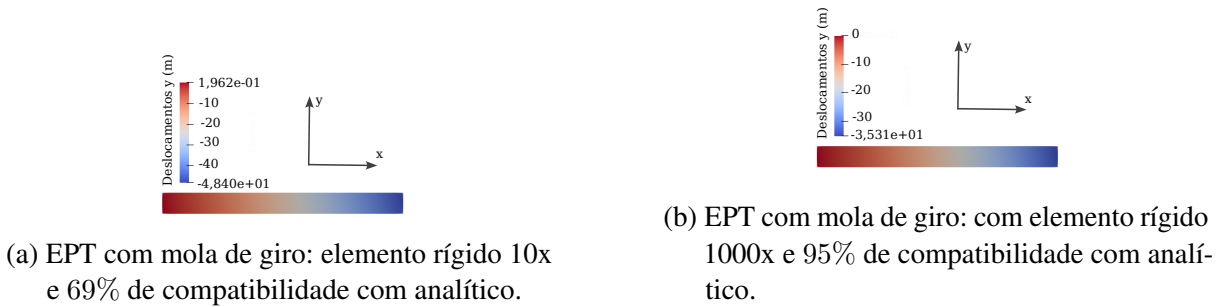
Figura 10 – EPT com mola de giro: geometria e dados.



Fonte: Autoria Própria.

A teoria desenvolvida para o acoplamento de diferentes graus de liberdade utiliza a ideia de um elemento rígido no interior do domínio formado por elementos finitos de EPT, cujo graus de liberdade são posições. Nesse sentido, melhor será a solução obtida quanto maior a rigidez desse elemento artificial utilizado para conectar graus de liberdade de posição com rotação (ver seção 3.5.3 para maiores detalhes). A Figura 11 ilustra a efetividade desse conceito, mostrando que quanto maior a rigidez do elemento de conexão, melhor é a representatividade do acoplamento do giro no interior do domínio de EPT.

Figura 11 – EPT com mola de giro: verificação do deslocamento vertical no ponto A com analítico.

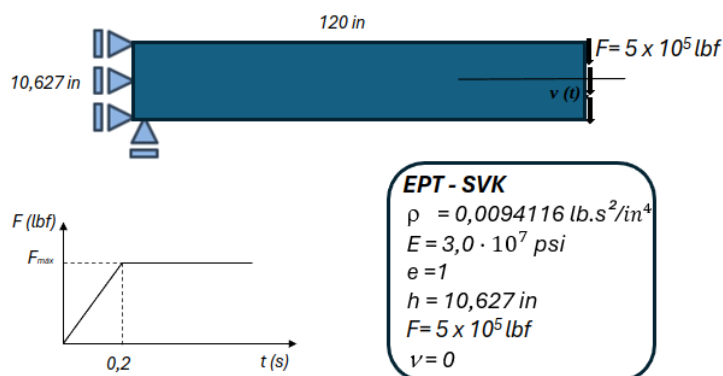


Fonte: Autoria Própria.

### 3.6.4 Viga em balanço com grandes deslocamentos e carregamento dinâmico

Este exemplo consiste na análise de uma viga em balanço submetida a uma força concentrada transiente na extremidade livre. O carregamento é aplicado de forma gradual no início da análise e depois mantido constante, conforme mostra o diagrama de carregamento da Figura 12. O módulo de elasticidade adotado é de  $E = 3,0 \cdot 10^7$  psi, o coeficiente de poisson é de  $\nu = 0$ , a massa específica é  $\rho_{mat} = 0,0094116 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{in}^4$ , a largura considera-se unitária e a altura é de  $h = 10,627$  in, conforme a Figura 12. A força máxima aplicada é de  $F = 5,0 \cdot 10^5$  lbf. Ademais, utilizam-se elementos finitos de EPT de aproximação cúbica e a lei constitutiva de SVK.

Figura 12 – Viga em balanço: geometria e carregamento.

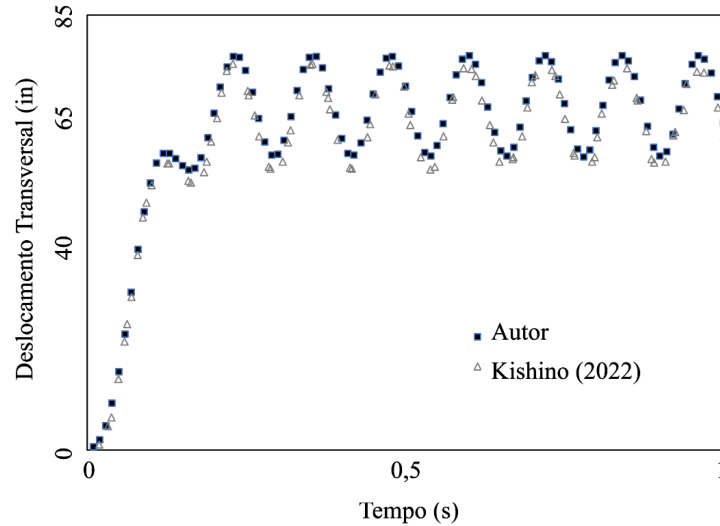


Fonte: Autoria Própria.

Este exemplo permite verificar a não linearidade geométrica e avaliar os deslocamentos em regime transiente. Os resultados obtidos são comparados com Kishino (2022b), apresentando boa correspondência para os deslocamentos (ver Figura 13). Nota-se que a viga apresenta deslocamentos da ordem de 65 in, representando um deslocamento vertical de mais de 6 vezes a altura da viga. Além disso, a relação força-deslocamento não é mais linear, como pode ser

visto em Kishino (2022b), resultando em um exemplo transiente com grande presença da não linearidade geométrica.

Figura 13 – Viga em balanço: resultado não linear e transiente.



Fonte: Autoria Própria.

### 3.6.5 Viga com amortecimento viscoso

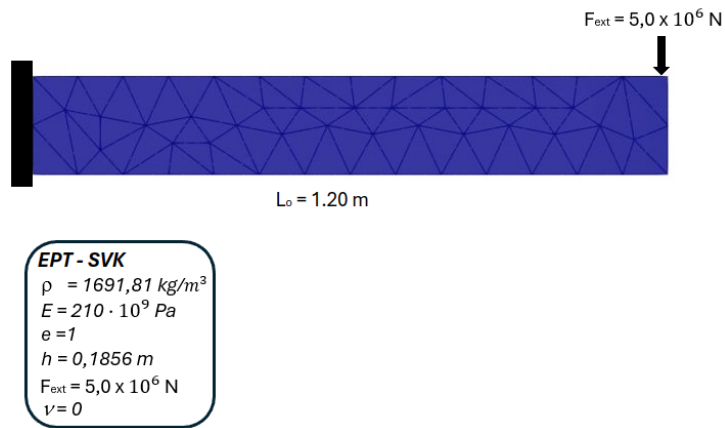
Este exemplo também trata-se de uma viga em balanço, porém as condições de contorno de Neumann, geometria e materiais são diferentes. Este exemplo visa verificar a presença do amortecimento viscoso na resposta dinâmica pelo MEF Posicional. Para isso, considera-se uma viga com comprimento de  $L = 1,20$  m submetida a uma força concentrada na ponta de  $F = 5,0 \cdot 10^6$  N (ver Figura 14). O material aplicado considera a hipótese de Estado Plano de Tensão e a lei constitutiva de SVK, com um módulo de elasticidade  $E = 210 \cdot 10^9$  Pa e massa específica de  $\rho_{mat} = 1691,81$  kg/m<sup>3</sup>. A área da seção transversal é de  $A = 0,1856$  m<sup>2</sup> e o momento de inércia é  $I = 5,33 \cdot 10^{-4}$  m<sup>4</sup>. Utilizam-se 80 elementos finitos triangulares de aproximação cúbica para a simulação da viga.

Ademais, considera-se um fator de amortecimento  $k_{am} = 200$  s<sup>-1</sup>. Esse fator representa o coeficiente de proporcionalidade entre a matriz de amortecimento e a de massa, ou seja,  $C_{am} = 200M_{massa}$ .

Os resultados são comparados com Sanches (2006), apresentando boa correspondência para a resposta transiente com amortecimento (ver Figura 15).

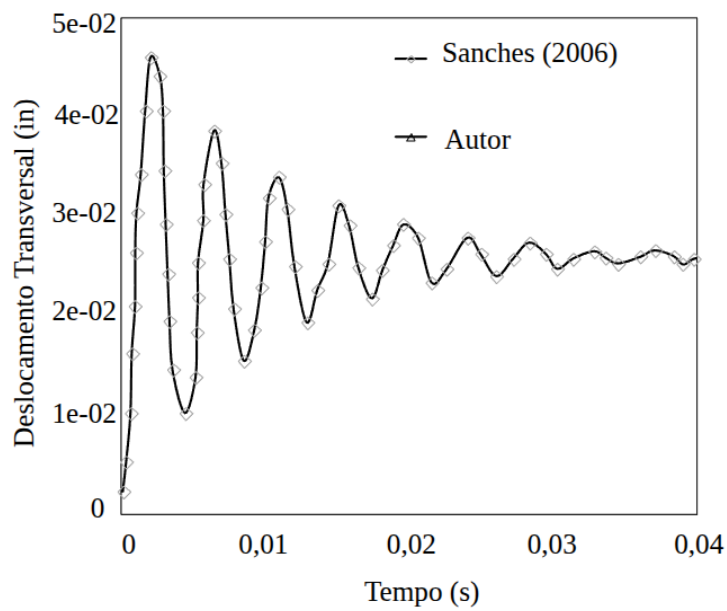
Por fim, destaca-se que o código do MEF posicional aplicado à dinâmica de sólidos foi implementado desde o início pelo autor, sendo todos exemplos gerados a partir do código desenvolvido. Nota-se ainda que a formulação do acoplamento entre mola de torção e sólido bidimensional é original desde trabalho, na forma como foi apresentada.

Figura 14 – Viga com amortecimento viscoso: geometria e carregamento.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 15 – Viga com amortecimento viscoso: resultado transiente com amortecimento.



Fonte: Autoria Própria.

# Capítulo 4

## Mecânica dos fluidos

Este capítulo apresenta uma formulação contínua da mecânica dos fluidos. Essa hipótese de continuidade permite que se utilize dos teoremas do cálculo diferencial e integral sobre um domínio contínuo, simplificando a análise dos escoamentos, conforme apresentado em Schulz (2003). Observa-se que a hipótese do contínuo permite inúmeras aplicações na engenharia de macroescala, todavia pode apresentar limitações como na análise de gases rarefeitos ou em microescala (Schulz, 2003).

Inicia-se com a aplicação dos princípios da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento para um fluido contínuo genérico 4.2. Na seção 4.3 introduz-se o modelo constitutivo para escoamentos newtonianos incompressíveis, e a partir de então, segue-se considerando esse caso particular devido ao escopo do trabalho.

A abordagem adotada é fundamentada em uma descrição lagrangiana da mecânica dos fluidos como pode ser visto em Avancini (2018), Avancini (2023), Avancini e Sanches (2020), Avancini *et al.* (2017), Moreira (2021) e Sanches (2022).

A descrição lagrangiana adotada será especificamente a lagrangiana parcialmente atualizada, tomando-se como configuração de referência a última configuração conhecida e equilibrada no instante ( $\Omega_n$ ). Essa escolha é desenvolvida com intuito de facilitar a análise de problemas de Interação Fluido-Estrutura (IFE) de forma unificada, utilizando-se das mesmas medidas de tensão e deformação para que a soma das contribuições de ambos domínios seja feita de forma conjunta (Avancini, 2023).

### 4.1 Cinemática

A descrição lagrangiana total da cinemática de meios contínuos é apresentada na seção 2.1 do capítulo 2. Para passar à forma lagrangiana parcialmente atualizada, basta alterar a configuração de referência para a última configuração equilibrada  $\Omega_n$ .

A Figura 16 ilustra a aplicação da função da mudança de configuração sobre o domínio de instante passado  $\Omega_n$ . Essa função mapeia os vetores de posição de cada ponto material do fluido da última configuração conhecida  $\Omega_n$  para a atual  $\Omega_{n+1}$ . Nota-se que durante a transformação  $F$  promovida pela função mudança de configuração  $f(\mathbf{x}_n)$  o comprimento de uma determinada linha de fluido  $\Delta x_n$  no instante de tempo  $\Omega_n$  é alterada para  $\Delta x_{n+1}$  na configuração atual  $\Omega_{n+1}$ . Essa variação de comprimento em conjunto com a rotação de uma linha de fluido qualquer compõem a mudança de configuração.

Figura 16 – Mudança de configuração: transformação do domínio  $\Omega_n$  para o atual.



Fonte: Autoria Própria.

A equação

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t) \quad (4.1)$$

expressa matematicamente a função mudança de configuração da Figura 16. Os termos  $n$  e  $n + 1$  não representam soma indicial, mas apenas denotam as configurações de referência passada e atual, respectivamente, conforme já ilustrado pela Figura 1.

A diferença entre dois pontos na configuração atual gera um vetor  $\Delta \mathbf{x}_{n+1}$ . De forma equivalente essa diferença no instante passado gera um vetor  $\Delta \mathbf{x}_n$ , conforme ilustrado pela Figura 16. No limite de  $\Delta \mathbf{x}_n$  tender a 0, a equação

$$\Delta \mathbf{x}_{n+1} = \nabla_n \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{x}_n \quad (4.2)$$

é válida para mapear uma linha de fluido qualquer da configuração  $\Omega_n$  para a configuração atual. Nesse contexto, também surge a definição do tensor gradiente da função mudança de configuração em relação à última configuração equilibrada  $\Omega_n$  denotado por  $\mathbf{F}$ . A equação

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla_n \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_n} \\ F_{ij} &= f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial (x_j)_n} \end{aligned} \quad (4.3)$$

define esse tensor de segunda ordem em notação simbólica e indicial, respectivamente.

Nesse contexto da descrição lagrangiana parcialmente atualizada, a medida de deformação volumétrica fica dada pela equação:

$$\begin{aligned}\varepsilon_v &= \frac{d\Omega_{n+1} - d\Omega_n}{d\Omega_n} = \frac{d\Omega_{n+1}}{d\Omega_n} - 1 = J - 1, \\ J &= \frac{d\Omega_{n+1}}{d\Omega_n} = \det(\mathbf{F}).\end{aligned}\quad (4.4)$$

Onde  $d\Omega_n$  é um volume infinitesimal no instante anterior e  $d\Omega_{n+1}$  é um volume infinitesimal atual. Nesse contexto também surge a definição do jacobiano da mudança de configuração dado por  $J$ .

Ainda no contexto da mudança de configuração, é possível definir expressões para mudanças infinitesimais de volume e de área. Isso é útil para transferir o domínio de integração da configuração atual para a configuração de referência  $\Omega_n$ . Tomando-se um volume infinitesimal na configuração  $\Omega_n$ , na atual e utilizando a equação (4.2) pode-se chegar à expressão para mudança de volume dada pela equação

$$d\Omega_{n+1} = Jd\Omega_n. \quad (4.5)$$

Calculando o volume de um cilindro infinitesimal na configuração inicial, na atual e utilizando a relação dada por (4.5), para mudança de volume, pode-se determinar a expressão para mudança de áreas dada pela equação

$$\mathbf{n}d\Gamma_{n+1} = J\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N}d\Gamma_n, \quad (4.6)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o versor normal à área atual  $d\Gamma_{n+1}$ ,  $\mathbf{N}$  é o versor normal à área de referência  $d\Gamma_n$ . Essa expressão também é conhecida como Fórmula de Nanson.

### 4.1.1 Medida de deformação

Existem diversas medidas de deformação que visam representar a mudança de forma em corpos contínuos. No contexto deste trabalho será utilizada a medida de deformação de Green-Lagrange expressa pela equação:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o alongamento à direita de Cauchy-Green, dado por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{F}. \quad (4.8)$$

No contexto de escoamentos viscosos, torna-se necessário o conhecimento da taxa de deformação do fluido, devido a parcela viscosa da lei constitutiva. Nesse contexto, calcula-se o tensor taxa de deformação de Green-Lagrange dado por:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{D}{Dt}\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}). \quad (4.9)$$

Onde  $\dot{\mathbf{F}}$  refere-se à derivada material no tempo do gradiente da função mudança de configuração, o qual pode ser definido como apresentado na equação

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{D}{Dt}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla_n \mathbf{f} = \nabla_n \dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}_n}. \quad (4.10)$$

Onde  $\nabla_n(\cdot)$  refere-se ao gradiente de uma grandeza  $(\cdot)$  em relação ao espaço de referência  $\Omega_n$ .

## 4.2 Equações governantes

Esta seção apresenta as equações governantes da mecânica dos fluidos em descrição lagrangiana parcialmente atualizada. Isso significa dizer que os cálculos são realizados tomando-se a última configuração equilibrada  $\Omega_n$  como referência.

### 4.2.1 Conservação da massa

Como o sistema considerado conserva a massa ao longo do tempo, o seu cálculo pode ser feito tanto sobre o domínio atual quanto o inicial. Partindo dessa premissa pode-se escrever a equação

$$m = \int_{\Omega_{n+1}} dm_{n+1} = \int_{\Omega_n} dm_n. \quad (4.11)$$

A massa total de um domínio de fluido na configuração atual pode ser calculada pela integração da massa específica no volume atual, como especificado pela equação

$$m = \int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} d\Omega_{n+1} = \int_{\Omega_n} \rho_n d\Omega_n. \quad (4.12)$$

Onde  $\rho_{n+1}$  representa o campo de massa específica na configuração atual. Utilizando-se a relação de mudança de volume  $d\Omega_{n+1} = J d\Omega_n$  escreve-se a equação

$$\int_{\Omega_n} \rho_{n+1} J d\Omega_n = \int_{\Omega_n} \rho_n d\Omega_n. \quad (4.13)$$

E, pela arbitrariedade do domínio  $d\Omega_n$  pode-se definir a relação

$$\rho_{n+1} J = \rho_n \quad (4.14)$$

que representa a conservação da massa. Nota-se que para materiais incompressíveis tem-se  $\rho_{n+1} = \rho_n$ , resultando em  $J = 1$  e implicando em deformação volumétrica nula como condição de conservação da massa em descrição lagrangiana no contexto de fluidos incompressíveis.

### 4.2.2 Equação de quantidade de movimento

Partindo da primeira Lei de Euler, que generaliza a segunda lei de Newton para partículas, a taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear, dada por sua derivada temporal material  $\dot{\mathbf{L}}$ , é igual à resultante das forças externas que atuam sobre o corpo:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{Q}^{ext}. \quad (4.15)$$

Expandindo-se a equação (4.15), considerando o instante atual  $n + 1$ , chega-se à equação:

$$\int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} d\Omega_{n+1} = \int_{\Gamma_{n+1}} \mathbf{f}_{n+1}^{sup} d\Gamma_{n+1} + \int_{\Omega_{n+1}} \mathbf{b}_{n+1} d\Omega_{n+1}. \quad (4.16)$$

onde  $\mathbf{f}_{n+1}^{sup}$  são as forças de superfície e  $\mathbf{b}_{n+1}$  as forças de volume.

Utilizando a conservação da massa (4.14), impondo  $\mathbf{b}_n = J\mathbf{b}_{n+1}$ , aplicando as relações de mudanças de áreas (4.6) e de volumes (4.5), atualizadas para a configuração de referência  $\Omega_n$ , na equação (4.16) e considerando a relação entre o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e o de Cauchy  $\mathbf{P}^T = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$  consegue-se transformar o domínio de integração para a última configuração equilibrada conhecida  $d\Omega_n$ , como consta em:

$$\int_{\Omega_n} \rho_n \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} d\Omega_n = \int_{\Gamma_n} \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{N} d\Gamma_n + \int_{\Omega_n} \mathbf{b}_n d\Omega_n. \quad (4.17)$$

Onde  $\mathbf{N}$  refere-se ao vetor normal à superfície na configuração de referência.

A equação (4.17) conduz ao equilíbrio dinâmico em descrição lagrangiana em termos do tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie  $\mathbf{P}$ . Aplicando a relação entre o primeiro e o segundo tensor de Piola  $\mathbf{P}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$  chega-se à forma global da equação de quantidade de movimento em descrição lagrangiana parcialmente atualizada, em termos da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie  $\mathbf{S}$  definido na referência  $\Omega_n$ , conforme expresso na equação:

$$\int_{\Omega_n} \rho_n \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} d\Omega_n = \int_{\Gamma_n} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{N} d\Gamma_n + \int_{\Omega_n} \mathbf{b}_n d\Omega_n. \quad (4.18)$$

### 4.3 Modelo constitutivo newtoniano incompressível

Os fluidos de forma geral são compressíveis, contudo em determinados contextos, o modelo incompressível pode ser bastante eficiente para representar o comportamento do fluido. Ao se tratar de escoamentos com números de Mach (relação entre velocidade do escoamento e velocidade do som no fluido) menores que 0,3, o fluido pode ser considerado incompressível, como pode ser visto, por exemplo, em Ferziger e Perić (1999), tornando esse modelo adequado para o escopo deste trabalho.

Em termos quantitativos, a análise de escoamentos pode ser realizada em descrição incompressível até velocidades próximas de 100 m/s para objetos no ar ou até 435 m/s na água, por exemplo. Isso inclui análises em barragens, onde as velocidades são baixas. Também encontra-se dentro desse limite a análise de fenômenos de interação fluido-estrutura em pontes em alto mar ou sobre rios. Segundo, Cruz (2018) os principais contribuintes do rio Amazonas apresentam velocidades médias diárias abaixo de 2 m/s; o rio São Francisco apresenta velocidades entre 1,6 e 3 m/s na cheia; e o rio Paraná também fica nessa ordem de grandeza com velocidades entre 1,5 e 2,1 m/s para o período de maior vazão. A análise de edifícios altos submetidos ao fenômeno de interação fluido-estrutura, também pode ser analisada, tendo em vista que a velocidade do vento em um evento extremo como um furacão varia de 33 a 70 m/s na escala de furacões de Saffir-Simpson<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Saffir-Simpson hurricane scale ou SSHS, disponível <<https://www.nhc.noaa.gov/aboutsshws.php>>.

### 4.3.1 Relação tensão-deformação

O modelo newtoniano estabelece relação linear entre as tensões de cisalhamento de Cauchy e a taxa de deformação euleriana  $\dot{\epsilon}$ , tal que, para escoamentos incompressíveis é representada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad (4.19)$$

onde  $p$  é a pressão que atua no fluido,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade e  $\boldsymbol{\tau}$  é a parte desviadora do tensor de Cauchy.

O tensor desvio é dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathfrak{D}_{n+1} : \dot{\epsilon}, \quad (4.20)$$

onde  $\dot{\epsilon}$  é a taxa de deformação euleriana,  $\mathfrak{D}_{n+1}$  é o tensor constitutivo de quarta ordem referente a relações de tensão-deformação na configuração atual  $\Omega_{n+1}$ , o qual é escrito em função da viscosidade dinâmica  $\mu$ , que, no caso particular de escoamentos incompressíveis possui componentes dadas por:

$$(D_{n+1})_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (4.21)$$

onde  $\delta_{ik}$  é o operador delta de Kronecker e a taxa de deformação euleriana é dada por:

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla_{n+1}^T \dot{\mathbf{x}}_{n+1} + \nabla_{n+1} \dot{\mathbf{x}}_{n+1} \right). \quad (4.22)$$

onde  $\dot{\mathbf{x}}_{n+1}$  é derivada material, em relação ao tempo, da partícula de fluido, ou seja, refere-se à sua velocidade.

### 4.3.2 Energia de deformação específica

É importante notar que, para escoamentos viscosos incompressíveis, não há uma energia potencial interna associadas às deformações. No entanto, é possível definir numericamente a variação dessa energia em decorrência das forças internas, o que implica em uma dissipação. Para tal, inicialmente supõe-se que haja essa energia, dada por:

$$\Psi = \Psi_{iso} + \Psi_{vol} \quad (4.23)$$

onde a energia de deformação é decomposta em uma parcela de deformação volumétrica  $\Psi_{vol}$  e uma parcela de distorção (deformação isocórica)  $\Psi_{iso}$ .

A parcela volumétrica está associada à parcela hidrostática de tensão, sendo dada por:

$$\Psi_{vol} = p(J - 1) \quad (4.24)$$

é escrita em termos da pressão e do operador Jacobiano ( $J$ ), o qual mede a relação entre volumes nas configurações atual e de referência. Nota-se que para materiais incompressíveis  $J = 1$  pela conservação da massa (4.14), conseqüentemente essa parcela de energia torna-se nula.

Uma variação da parcela isocórica é dada pela equação

$$\delta\Psi_{iso} = \mathbf{S}_{iso} : \delta\mathbf{E}. \quad (4.25)$$

Onde  $\mathbf{S}_{iso}$  denota o tensor das tensões desviadoras ou também denominado de tensões isocóricas.

### 4.3.3 Tensões de Piola-Kirchhoff

A equação

$$\mathbf{S} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{E}} = \frac{\partial\Psi_{iso}}{\partial\mathbf{E}} + \frac{\partial\Psi_{vol}}{\partial\mathbf{E}} = \mathbf{S}_{iso} + \mathbf{S}_{vol} \quad (4.26)$$

apresenta uma forma de decomposição do tensor de tensões para fluidos, na forma do Piola de segunda espécie  $\mathbf{S}$ .

A parcela isocórica das tensões é dada pela equação

$$\mathbf{S}_{iso} = \mathfrak{D}_n : \dot{\mathbf{E}}. \quad (4.27)$$

Observa-se que essa parcela depende apenas da taxa de deformação e não do histórico de deformações, como geralmente ocorre nos sólidos. Onde  $\dot{\mathbf{E}}$  denota o tensor taxa de deformação de Green;  $\mathfrak{D}_n$  refere-se ao tensor constitutivo de quarta ordem na configuração de referência  $\Omega_n$ .

A parcela volumétrica das tensões é escrita conforme expresso em:

$$\mathbf{S}_{vol} = pJ\mathbf{C}^{-1}. \quad (4.28)$$

Dessa forma, escreve-se a lei constitutiva para fluidos newtonianos na referência lagrangiana como:

$$\mathbf{S} = \mathfrak{D}_n : \dot{\mathbf{E}} + pJ\mathbf{C}^{-1}. \quad (4.29)$$

### 4.3.4 Tensor constitutivo de quarta ordem

Lembrando-se que o conjugado energético da deformação de Green é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie:

$$\mathfrak{D}_{n+1} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{E} \otimes \partial\mathbf{E}} = \frac{\partial^2\Psi_{iso}}{\partial\mathbf{E} \otimes \partial\mathbf{E}} + \frac{\partial^2\Psi_{vol}}{\partial\mathbf{E} \otimes \partial\mathbf{E}} = \frac{\partial\mathbf{S}_{iso}}{\partial\mathbf{E}} + \frac{\partial\mathbf{S}_{vol}}{\partial\mathbf{E}} \quad (4.30)$$

Assim, aplicando as relações (4.27) e (4.28) na (4.30) e desenvolvendo, obtém-se o tensor constitutivo referente à configuração atual  $\mathfrak{D}_{n+1}$  dado pela equação:

$$\mathfrak{D}_{n+1} = \mu(\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{I}_4) \quad \text{ou} \quad (D_{n+1})_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (4.31)$$

onde  $\mathbf{I}$  representa o tensor identidade de segunda ordem e  $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$  denota o tensor identidade de quarta ordem;  $\delta_{ij}$  refere-se ao operador delta de Kronecker.

O tensor constitutivo na configuração de referência  $\mathfrak{D}_n$  é obtido pela operação de *pull-back* sobre  $\mathfrak{D}_{n+1}$ , conforme especificado na equação:

$$\mathfrak{D}_n = J\mathbf{F}_1^{-1} \otimes \mathbf{F}_2^{-1} \otimes \mathbf{F}_3^{-1} \otimes \mathbf{F}_4^{-1} :: \mathfrak{D}_{n+1} \quad \text{ou} \quad (D_n)_{ijkl} = JF_{ia}^{-1}F_{jb}^{-1}F_{kc}^{-1}F_{ld}^{-1}(D_{n+1})_{abcd}. \quad (4.32)$$

Onde  $\otimes$  representa o operador de produto tensorial e  $::$  representa uma contração de quarta ordem. Nota-se que a forma indicial contém a informação completa sobre quais índices atuam em cada tensor.

Para mais detalhes sobre modelos constitutivos para fluidos recomenda-se consultar Avancini (2023) e Sanches (2022).

## Capítulo 5

# Método dos elementos finitos em descrição lagrangiana parcialmente atualizada aplicado a fluidos

Neste capítulo é apresentada a formulação numérica necessária para a modelagem computacional de fluidos utilizando a abordagem posicional do Método dos Elementos Finitos, desenvolvida por Avancini e Sanches (2020).

Nessa formulação, as variáveis do problema são as posições e as pressões nodais, sendo recuperado os valores dos campos por meio da interpolação com as funções de forma no elemento. Dessa forma, fica claro que trata-se de uma formulação mista e cuidados especiais são necessários para estabilizar o campo de pressão ou contornar de forma consistente as condições de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB).

A solução numérica segue uma abordagem energética, sendo as equações derivadas tomando-se a última configuração equilibrada  $\Omega_n$  como a referência. Nesse sentido, trata-se de uma descrição lagrangiana parcialmente atualizada.

O modelo constitutivo adotado é exclusivamente para fluidos newtonianos incompressíveis, permitindo diversas aplicações nos campos da Engenharia e da Interação Fluido-Estrutura.

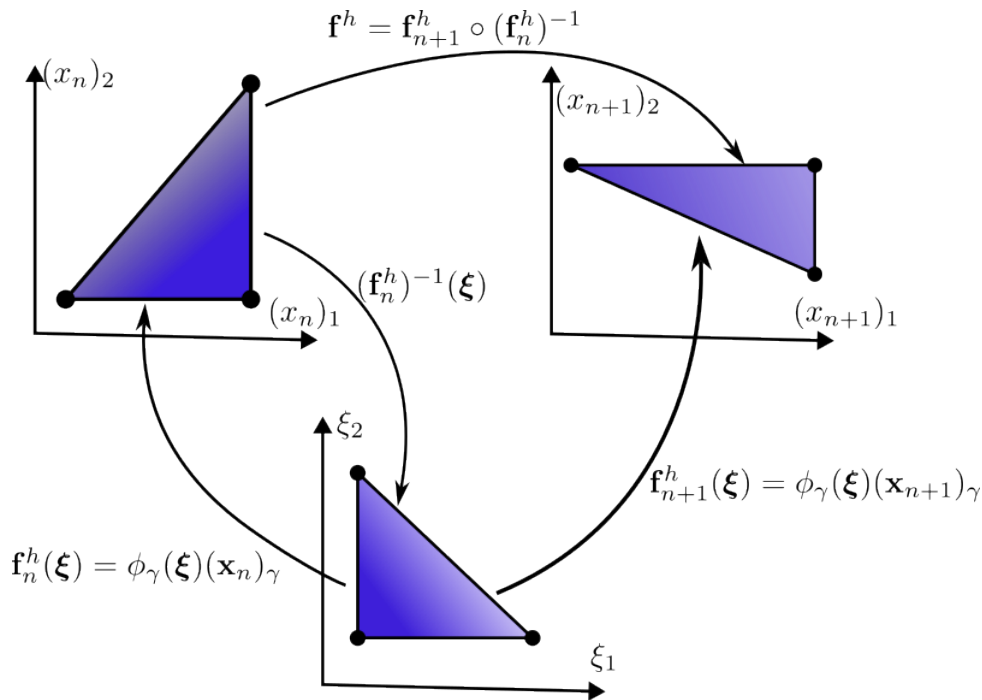
Para a discretização no tempo é utilizado o integrador temporal  $\alpha$ -generalizado em sua versão para fluidos newtonianos, como proposto por Jansen *et al.* (2000). Essa técnica de integração é uma abordagem implícita que permite controlar o amortecimento numérico de modo a dissipar as altas frequências de vibração, as quais geralmente são espúrias. A abordagem de integração implícita é mais adequada para escoamentos incompressíveis, pois a pressão atua de forma naturalmente implícita e com essa abordagem é possível ter uma maior flexibilidade em termos da escolha do passo de tempo necessário para manter a estabilidade (Reddy; Gartling, 2010).

A formulação lagrangiana para escoamentos incompressíveis tem por base os textos de Avancini (2018), Avancini (2023), Avancini e Sanches (2020), Avancini *et al.* (2017), Avancini *et al.* (2024), Moreira (2021) e Sanches (2022).

## 5.1 Discretização do domínio

Na discretização espacial, o domínio original  $\Omega$  é substituído por um espaço aproximado  $\Omega^h$  formado por um conjunto de elemento finitos. A cinemática lagrangiana descrita na seção 3.1 pode ser aproveitada, bastando atualizar a configuração de referência para  $\Omega_n$ , conforme ilustra a Figura 17. Destaca-se que, apesar da função mudança de configuração e do seu gradiente possuírem os mesmos símbolos do capítulo 3, deve-se ter em mente que no presente capítulo tais entidades acumulam informações apenas da última configuração equilibrada  $\Omega_n$ . Por exemplo, o gradiente de mudança de configuração discreto é dado por  $\mathbf{F}^h = \mathbf{F}_{n+1}^h \cdot (\mathbf{F}_n^h)^{-1}$  (ver equação (5.3)), de tal maneira que o tensor de Green definido nesta seção refere-se a deformações apenas a partir da última configuração equilibrada e assim por diante.

Figura 17 – Mudança de configuração: descrição lagrangiana parcialmente atualizada.



Para completar a descrição cinemática lagrangiana para fluidos é preciso definir a taxa de deformação de Green no contexto da configuração de referência  $\Omega_n$ , conforme consta na equação:

$$\dot{\mathbf{E}}^h = \frac{D}{Dt} \mathbf{E}^h = \frac{1}{2} ((\dot{\mathbf{F}}^h)^T \cdot \mathbf{F}^h + (\mathbf{F}^h)^T \cdot \dot{\mathbf{F}}^h). \quad (5.1)$$

Onde o termo  $\dot{\mathbf{F}}^h$  refere-se à taxa do gradiente de mudança de configuração e pode ser escrito conforme apresenta a equação:

$$\dot{\mathbf{F}}^h = \frac{D}{Dt} \mathbf{F}^h = \nabla_n \dot{\mathbf{f}}^h = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_n} \cdot \dot{\mathbf{X}}_{n+1} \quad \text{ou} \quad \dot{F}_{ij}^h = \frac{D}{Dt} F_{ij}^h = \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial (x_n)_j} (\dot{X}_{n+1})_{i\gamma}. \quad (5.2)$$

Sendo  $(x_n)_j = \phi_\gamma (X_n)_{j\gamma}$ , onde  $\phi_\gamma$  refere-se à função de forma do nó  $\gamma$  e  $(X_n)_{j\gamma}$  às coordenadas da configuração de referência na direção  $j$  e do nó  $\gamma$ .  $\dot{\mathbf{f}}^h$  trata-se da velocidade da mudança de configuração. O tensor  $\mathbf{F}^h$  denota o gradiente da mudança de configuração discreto, que pela descrição lagrangiana parcialmente atualizada fica escrito conforme a equação:

$$\mathbf{F}^h = \mathbf{F}_{n+1}^h \cdot (\mathbf{F}_n^h)^{-1}. \quad (5.3)$$

Os gradientes  $\mathbf{F}_{n+1}^h$  e  $\mathbf{F}_n^h$  permitem realizar o mapeamento da mudança de configuração por meio das funções de forma, conforme consta nas equações

$$\mathbf{F}_{n+1}^h = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{X}_{n+1} \quad \text{ou} \quad (F_{n+1}^h)_{ij} = \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \xi_j} (X_{n+1})_{i\gamma}; \quad (5.4)$$

e

$$\mathbf{F}_n^h = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{X}_n \quad \text{ou} \quad (F_n^h)_{ij} = \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial \xi_j} (X_n)_{i\gamma}. \quad (5.5)$$

Onde  $\mathbf{X}_{n+1}$  e  $\mathbf{X}_n$  referem-se às coordenadas nodais atuais e da última configuração equilibrada, respectivamente.  $\phi$  refere-se ao vetor de funções de forma nodais, o qual é função das coordenadas adimensionais  $\boldsymbol{\xi}$ .

As funções de mapeamento da mudança de configuração, em termos das funções de forma são definidas como:

$$\mathbf{f}_{n+1}^h = \mathbf{x}_{n+1}^h(\boldsymbol{\xi}) = \phi(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}_{n+1} \quad \text{ou} \quad (f_{n+1}^h)_i = \phi_\gamma (X_{n+1})_{i\gamma}; \quad (5.6)$$

e

$$\mathbf{f}_n^h = \mathbf{x}_n^h(\boldsymbol{\xi}) = \phi(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}_n \quad \text{ou} \quad (f_n^h)_i = \phi_\gamma (X_n)_{i\gamma}. \quad (5.7)$$

Por fim, utilizam-se as mesmas funções de forma aplicadas às posições para interpolar o campo de pressão, conforme apresenta a equação:

$$p^h = p^h(\boldsymbol{\xi}) = \phi(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{p} \quad \text{ou} \quad (p^h) = \phi_\gamma p_\gamma. \quad (5.8)$$

Onde  $\mathbf{p}$  denota o vetor de pressões nodais. Essa escolha para o campo de pressão pode gerar instabilidades numéricas, devido ao não atendimento completo das condições de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (Babuška; Narasimhan, 1997; Bathe *et al.*, 2000; BREZZI, 1974), nesse sentido adota-se a técnica *Pressure Stabilizing/Petrov Galerkin* (PSPG) como forma consistente de se obter uma solução estabilizada.

## 5.2 Forma discreta das equações governantes para escoamentos incompressíveis

Nesta seção, as equações governantes da mecânica dos fluidos são obtidas a partir da aplicação de princípios energéticos de minimização da energia mecânica total do sistema. A aplicação do Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica resulta na equação de equilíbrio dinâmico e as variáveis do problema são aproximadas, conforme apresentado na seção 5.1. Observa-se que a descrição aplicada é lagrangiana parcialmente atualizada, nesse sentido os espaços de integração estão no domínio  $\Omega_n$ .

### 5.2.1 Energia mecânica

Para a descrição mecânica de um fluido qualquer são consideradas as parcelas de energia potencial externa, energia de deformação e energia cinética como consta na equação

$$\Pi^h = \Pi_{ext}^h + \Pi_{\varepsilon}^h + \Pi_{cin}^h. \quad (5.9)$$

A parcela de energia potencial externa que atua sobre o fluido é definida em

$$\Pi_{ext}^h = - \int_{\Gamma_n^h} \mathbf{f}_n^{sup} \cdot \mathbf{x}_{n+1}^h d\Gamma_n^h - \int_{\Omega_n^h} \mathbf{b}_n \cdot \mathbf{x}_{n+1}^h d\Omega_n^h, \quad (5.10)$$

a parcela de energia de deformação do fluido é dada pela expressão

$$\Pi_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega_n^h} \Psi^h d\Omega_n^h \quad (5.11)$$

e a parcela de energia cinética das partículas do fluido é calculada em

$$\Pi_{cin}^h = \int_{\Omega_n^h} \frac{1}{2} \rho_n \dot{\mathbf{x}}_{n+1}^h \cdot \dot{\mathbf{x}}_{n+1}^h d\Omega_n^h. \quad (5.12)$$

Destaca-se que, no caso particular de escoamentos newtonianos incompressíveis, formalmente não há nenhuma energia de deformação (que é relacionada às forças internas), no entanto, supõe-se inicialmente que exista essa parcela de energia, uma vez que a variação de energia em decorrência das tensões é conhecida, a qual será calculada numericamente posteriormente. Nota-se que as expressões são integradas na geometria discretizada por elementos finitos  $\Omega_n \rightarrow \Omega_n^h$  e  $\Gamma_n \rightarrow \Gamma_n^h$ . Onde  $\mathbf{x}_{n+1}^h$  refere-se ao campo de posições atuais da geometria aproximada;  $\mathbf{f}_n^{sup}$  é o campo de forças de superfície;  $\mathbf{b}_n$  é o campo de forças de domínio que atuam na última configuração equilibrada;  $\Psi^h$  é a energia específica de deformação já em função das variáveis aproximadas;  $\rho_n$  é massa específica na última configuração equilibrada e  $\dot{\mathbf{x}}_{n+1}^h$  é o campo de velocidades atuais da geometria discretizada.

Procedendo-se ao cálculo da primeira variação de cada parcela do funcional de energia mecânica, em relação às posições atuais  $\mathbf{x}_{n+1}^h$ , chega-se às equações

$$\delta \Pi_{ext}^h = - \int_{\Gamma_n^h} \mathbf{f}_n^{sup} \cdot \delta \mathbf{x}_{n+1}^h d\Gamma_n^h - \int_{\Omega_n^h} \mathbf{b}_n \cdot \delta \mathbf{x}_{n+1}^h d\Omega_n^h, \quad (5.13)$$

$$\delta\Pi_\varepsilon^h = \int_{\Omega_n^h} \delta\Psi^h d\Omega_n^h = \int_{\Omega_n^h} \frac{\partial\Psi^h}{\partial\mathbf{E}^h} : \delta\mathbf{E}^h d\Omega_n^h = \int_{\Omega_n^h} \mathbf{S}^h : \delta\mathbf{E}^h d\Omega_n^h \quad (5.14)$$

e

$$\delta\Pi_{cin}^h = \int_{\Omega_n^h} \rho_n \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^h \cdot \delta\mathbf{x}_{n+1}^h d\Omega_n^h. \quad (5.15)$$

Em particular, nota-se que para a equação (5.14) é importante lembrar que  $\Psi^h = \Psi^h(\mathbf{E}^h)$  e  $\mathbf{S}^h = \frac{\partial\Psi^h}{\partial\mathbf{E}^h}$ . No desenvolvimento da equação (5.15) faz-se o uso da conservação da massa e seu colorário, para mais detalhes recomenda-se consultar Avancini (2023).

Fazendo o mesmo cálculo variacional, mas agora em relação ao campo de pressões, resulta na equação

$$(\delta\Pi_\varepsilon^h)_p = \int_{\Omega_n} \delta p^h (J - 1) d\Omega_n^h. \quad (5.16)$$

Nota-se que apenas a parcela de energia de deformação volumétrica depende desse campo, resultando em uma expressão análoga a um multiplicador de Lagrange que exerce um trabalho nulo para escoamentos incompressíveis.

## 5.2.2 Equações de conservação pela abordagem variacional

A forma semi-discreta da primeira variação da energia total em termos de posições fica expressa por

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{\mathbf{x}}^h &= - \int_{\Gamma_n^h} \mathbf{f}_n^{sup} \cdot \delta\mathbf{x}_{n+1}^h d\Gamma_n^h - \int_{\Omega_n^h} \mathbf{b}_n \cdot \delta\mathbf{x}_{n+1}^h d\Omega_n^h + \\ &+ \int_{\Omega_n^h} \mathbf{S}^h : \delta\mathbf{E}^h d\Omega_n^h + \int_{\Omega_n^h} \rho_n \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^h \cdot \delta\mathbf{x}_{n+1}^h d\Omega_n^h = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.17)$$

e em relação às pressões resulta em

$$\delta\Pi_p^h = \int_{\Omega_n} \delta p^h (J - 1) d\Omega_n^h = \mathbf{0}. \quad (5.18)$$

Lembrando-se que a variação de uma grandeza pode ser calculada em função de sua derivada  $\delta(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\mathbf{X}} \delta\mathbf{X}$ . Escrevendo as variáveis espaciais em termos das funções de forma como em  $(\mathbf{x}_{n+1}^h)_i = \phi_\gamma(X_{n+1})_{i\gamma} = \phi \cdot \mathbf{X}_{n+1}$  e lembrando que a sua derivada em termos das posições nodais é da por  $\frac{\partial\mathbf{x}_{n+1}^h}{\partial\mathbf{X}_{n+1}} = \phi$ . E pela arbitrariedade de  $\delta\mathbf{X}$  chega-se na equação de conservação de quantidade de movimento na forma semi-discreta dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi_{\mathbf{x}}^h}{\partial\mathbf{X}_{n+1}} &= - \int_{\Gamma_n^h} \mathbf{f}_n^{sup} \cdot \phi d\Gamma_n^h - \int_{\Omega_n^h} \mathbf{b}_n \cdot \phi d\Omega_n^h + \\ &+ \int_{\Omega_n^h} \mathbf{S}^h : \frac{\partial\mathbf{E}^h}{\partial\mathbf{X}_{n+1}} d\Omega_n^h + \int_{\Omega_n^h} \rho_n \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^h \cdot \phi d\Omega_n^h = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Aplicando-se o mesmo procedimento para a equação (5.18) chega-se à forma semi-discreta da condição de incompressibilidade:

$$\frac{\partial\Pi_p^h}{\partial\mathbf{p}_{n+1}} = \int_{\Omega_n} \phi (J - 1) d\Omega_n^h = \mathbf{0}. \quad (5.20)$$

### 5.2.3 Estabilização da pressão

Ao se trabalhar com escoamentos incompressíveis e com a imposição da condição de incompressibilidade de forma implícita, ou seja, de forma forte e sem uso de penalizações, surge a necessidade de se utilizar elementos finitos de ordem superior para garantir a estabilidade do campo de pressão, conforme detalhado em 1.1.2.1. Entretanto, a geração dessas malhas no contexto de técnicas de remalhamento é complexa e não possui regras bem definidas para o remalhamento como no caso de malhas lineares, as quais podem ser geradas pela triangulação de Delaunay.

Nesse contexto, a fim de obter um método que resulte em campos de pressões estáveis, consistentes, sem demandar grandes restrições sobre a malha e que permita um processo de remalhamento mais flexível que surgem as formulações estabilizadas consistentes, as quais contornam partes das restrições LBB por meio da introdução de parcelas para preencher a diagonal principal do sistema (ver seção (1.1.2.1)). A fim de manter a consistência, essa parcela deve ser nula na convergência, assim o caminho de solução é estabilizado, mas na convergência a equação governante consistente é atendida.

Assim, recorre-se à técnica de estabilização *Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin* (PSPG) (Bazilevs *et al.*, 2013; Tezduyar, 1991; Tezduyar *et al.*, 1992b), a qual consiste em adicionar à equação da incompressibilidade o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por uma função escolhida de modo a preencher o espaço nulo na matriz tangente e promover estabilidade no campo de pressão. Assim, a forma semi-discreta da equação da incompressibilidade fica dada por:

$$\frac{\partial \Pi_p^h}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} + \mathcal{S}_{PSPG} = \mathbf{0}. \quad (5.21)$$

Onde  $\mathcal{S}_{PSPG}$  é a parcela estabilizadora introduzida na equação da incompressibilidade.

Para que essa parcela mantenha a consistência da formulação, ela deve ser nula na convergência. Nesse sentido,  $\mathcal{S}_{PSPG}$  é dado pelo produto entre o resíduo da equação da conservação do momento linear e o gradiente da função de forma em relação à configuração atual, conforme apresenta a equação:

$$\mathcal{S}_{PSPG} = \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{PSPG}}{\rho_n} \nabla_{n+1} \phi \cdot \mathbf{r}_{mov} d\Omega_n. \quad (5.22)$$

onde  $\tau_{PSPG}$ , denominado parâmetro de estabilização, é um fator de escala que objetiva garantir boa convergência no processo de solução do problema não linear; e  $\rho_n$  é a massa específica na última configuração equilibrada. Nota-se que na convergência, o resíduo  $\mathbf{r}_{mov}$  é nulo, retomando à equação original de incompressibilidade.

O parâmetro de estabilização  $\tau_{PSPG}$  é calculado por:

$$\tau_{PSPG} = \left( \frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.23)$$

$$\tau_1 = \frac{\Delta t^2}{2}, \quad (5.24)$$

$$\tau_2 = \frac{\Delta t h_{RGN}^2}{4(\mu/\rho)}, \quad (5.25)$$

$$h_{RGN} = 2(|\mathbf{v} \cdot \nabla \phi|)^{-1} \quad (5.26)$$

e

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla |\dot{\mathbf{x}}^h|}{|\nabla |\dot{\mathbf{x}}^h||}. \quad (5.27)$$

Onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica;  $\rho$  é a massa específica do material incompressível;  $\dot{\mathbf{x}}^h$  denota o campo de velocidades;  $\phi$  caracteriza a função de forma do elemento;  $\Delta t$  refere-se ao passo de tempo da integração temporal; os demais termos são parâmetros intermediários calculados pelas equações apresentadas.

Substituindo a parcela estabilizadora na equação de incompressibilidade modificada (5.21), aplicando o modelo constitutivo newtoniano, desprezando as parcelas do tensor desviador de segunda ordem e desenvolvendo chega-se à forma estabilizada da equação semi-discreta de incompressibilidade:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n^h} \phi(J-1) d\Omega_n^h + \int_{\Omega_n^h} \tau_{PSPG} \nabla_n \phi \cdot (\mathbf{F}^h)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{n+1}^h d\Omega_n^h + \\ & - \int_{\Omega_n^h} \frac{\tau_{PSPG}}{\rho_n} J \nabla_n \phi \cdot (\mathbf{C}^h)^{-1} \cdot \nabla_n p^h d\Omega_n^h - \int_{\Omega_n^h} \frac{\tau_{PSPG}}{\rho_n} \nabla_n \phi \cdot (\mathbf{F}^h)^{-1} \cdot \mathbf{b}_n d\Omega_n^h = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para mais detalhes a respeito da estabilização do campo de pressão em descrição lagrangiana recomenda-se consultar Avancini (2023) e Avancini *et al.* (2024).

## 5.2.4 Forças nodais equivalentes

A forma semi-discreta da equação da quantidade de movimento pode ser organizada em função de termos denominados forças nodais equivalentes externas  $\mathbf{Q}_{ext}^h$ , internas (ou de deformação)  $\mathbf{Q}_{int}^h$  e inerciais  $\mathbf{Q}_{iner}^h$ , como expressam as equações:

$$\mathbf{Q}_{ext}^h = \int_{\Gamma_n^h} \mathbf{f}_n^{sup} \cdot \phi d\Gamma_n^h + \int_{\Omega_n^h} \mathbf{b}_n \cdot \phi d\Omega_n^h, \quad (5.29)$$

$$\mathbf{Q}_{iner}^h = \int_{\Omega_n^h} \rho_n \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^h \cdot \phi d\Omega_n^h, \quad (5.30)$$

e

$$\mathbf{Q}_{int}^h = \int_{\Omega_n^h} \mathbf{S}^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} d\Omega_n^h = \int_{\Omega_n^h} \mathbf{S}'^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} d\Omega_n^h + \int_{\Omega_n^h} p^h J(\mathbf{C}^h)^{-1} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} d\Omega_n^h. \quad (5.31)$$

Onde  $\mathbf{S}$  é o segundo tensor de Piola-Kirchhoff dado por  $\mathbf{S}^h = \mathbf{S}'^h + p^h J(\mathbf{C}^h)^{-1}$ .

A parcela de força nodal equivalente interna calculada pela equação (5.31) pode ser decomposta nas porções de deformação volumétrica

$$\mathbf{Q}_{vol}^h = \int_{\Omega_n^h} p^h J(\mathbf{C}^h)^{-1} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} d\Omega_n^h \quad (5.32)$$

e isocórica

$$\mathbf{Q}_{iso}^h = \int_{\Omega_n^h} \mathbf{S}'^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} d\Omega_n^h. \quad (5.33)$$

Sendo

$$\mathbf{c}_{inc} = \int_{\Omega_n} \phi(J-1) d\Omega_n^h \quad (5.34)$$

o termo que define a condição de incompressibilidade. Substituindo essas expressões nas equações governantes chega-se em um equilíbrio de forças nodais no fluido

$$-\mathbf{Q}_{ext}^h + \mathbf{Q}_{int}^h + \mathbf{Q}_{iner}^h = \mathbf{0} \quad (5.35)$$

e na equação de incompressibilidade estabilizada

$$\mathbf{c}_{inc} + \mathcal{S}_{PSPG} = \mathbf{0}. \quad (5.36)$$

Esse conjunto de equações representam um sistema semi-discreto de equações não lineares. Deve-se então ainda empregar uma técnica de integração temporal seguida do método de solução numérica para o sistema não linear.

## 5.3 Integração numérica

As equações governantes desenvolvidas utilizam integrais espaciais e variáveis temporais. Nesse sentido, esta seção apresenta técnicas para tratar numericamente problemas gerais de integração no domínio e como discretizar as derivadas temporais.

### 5.3.1 Integração numérica no espaço

A integração numérica no espaço para o problema de dinâmica dos fluidos é análoga à feita para o sólido, bastando atualizar o espaço de referência, que agora trata-se da última configuração equilibrada  $\Omega_n$ , conforme denota a equação

$$\int_{\Omega_n^h} \mathfrak{F}(\mathbf{x}) d\Omega_n^h = \sum_{i=1}^{np} \mathfrak{F}(\mathbf{x}(\xi_{(i)})) J_n(\xi_{(i)}) w_{(i)}. \quad (5.37)$$

Onde  $\mathfrak{F}(\mathbf{x})$  refere-se a uma função qualquer;  $np$  trata-se do número de pontos de integração;  $\mathbf{x}(\xi_{(i)})$  denota o cálculo da posição em função das coordenadas admimensionais no ponto de integração;  $J_n(\xi_{(i)})$  é o termo jacobiano da transformação de espaços calculado no ponto de integração; e  $w_{(i)}$  é o peso associado ao ponto de integração  $i$ .

### 5.3.2 Integração numérica temporal

Dadas as vantagens do integrador  $\alpha$ -generalizado apresentadas na seção 3.3.2, especialmente à forma eficiente de se controlar a dissipação em altas frequências, adota-se este integrador

também para o fluido. No entanto, a forma aplicada para o sólido, proposta por Chung e Hulbert (1993), precisa ser revista para que haja dissipação ótima de altas frequências para o fluido.

A extensão dessa técnica para análises da dinâmica dos fluidos computacional foi descrita por Jansen *et al.* (2000), sendo obtido uma família de integradores temporais de segunda ordem aplicáveis às equações de Navier-Stokes no contexto do Método dos Elementos Finitos estabilizados.

Essa técnica de integração utiliza por base o integrador Newmark- $\beta$ , contudo desenvolve as equações governantes em termos de um instante intermediário  $\alpha_f$  entre o último equilibrado e o atual como ilustrado pelas equações

$$-\mathbf{Q}_{n+\alpha_f}^{ext} + \mathbf{Q}_{n+\alpha_f}^{int} + \mathbf{Q}_{n+\alpha_m}^{iner} = \mathbf{0} \quad (5.38)$$

e

$$(\mathbf{c}_{inc})_{n+\alpha_f} + (\mathcal{S}_{PSPG})_{n+\alpha_f} = \mathbf{0}. \quad (5.39)$$

Onde  $\mathbf{c}_{inc}$  denota a condição de incompressibilidade;  $\alpha_f$  ilustra que as forças são calculadas em um passo intermediário entre  $n$  e  $n + 1$ ;  $\alpha_m$  denota que as forças inerciais são calculadas em um passo defasado em relação aos demais termos por esse método;  $\mathbf{Q}_{n+\alpha_f}^{ext}$  refere-se às forças nodais equivalentes aos campos de superfície e de domínio;  $\mathbf{Q}_{n+\alpha_f}^{int}$  refere-se às forças internas de deformação, sendo composta pelas parcelas volumétrica e isocórica.

Nota-se que as forças inerciais  $\mathbf{Q}_{n+\alpha_m}^{iner}$  são defasadas em relação às demais em um passo  $\alpha_m$ . Isso permite a imposição de um amortecimento sobre as altas frequências de vibração de forma controlada, em termos do raio espectral.

Os termos de forças definidos em passos intermediários no método  $\alpha$ -generalizado são calculados em termos de uma interpolação entre os valores dos passos  $n$  e  $n + 1$ , conforme já exposto pelas equações da seção 3.3.2.

Ademais, ressalta-se que os parâmetros  $\alpha_f$  e  $\alpha_m$  no caso do método  $\alpha$ -generalizado aplicado a fluidos são dados pelas equações

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left( \frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right) \quad (5.40)$$

e

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}; \quad (5.41)$$

conforme a abordagem de Jansen *et al.* (2000).

Nesse contexto, a forma totalmente discreta das equações governantes do fluido fica

expressa por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_{n+\alpha}}{\partial (\mathbf{x}_a)_{n+\alpha}} &= \int_{\Omega_n} \rho_n \phi_a \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha}^h d\Omega_n + \int_{\Omega_n} (\dot{\mathbf{E}}^h)_{n+\alpha} : (\mathfrak{D}_n^h)_{n+\alpha} : \frac{\partial (\mathbf{E}^h)_{n+\alpha}}{\partial (\mathbf{x}_a)_{n+\alpha}} d\Omega_n \\
&\quad - \int_{\Omega_n} p_{n+1}^h \frac{\partial (J^h)_{n+\alpha}}{\partial (\mathbf{x}_a)_{n+\alpha}} d\Omega_n - \int_{\Omega_n} \phi_a \mathbf{b}_n d\Omega_n - \int_{\Gamma_n} \phi_a \mathbf{f}_n^{sup} d\Gamma_n = 0, \\
\frac{\partial \Pi_{n+\alpha}}{\partial (p_a)_{n+1}} + (R_s)_{n+\alpha} &= - \int_{\Omega_n} \phi_a ((J^h)_{n+\alpha} - 1) d\Omega_n + \\
\int_{\Omega_n} \tau_{PSPG} \frac{1}{\rho_n} (\mathbf{F}^h)_{n+\alpha}^{-T} \nabla_{\mathbf{x}_n} \phi_a \cdot & \left[ \rho_n \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha}^h - \nabla_{\mathbf{x}_n} \cdot \left( (\mathcal{S}_{PSPG}^h)_{n+\alpha} (\mathbf{F}_n^h)^T_{n+\alpha} \right) - \mathbf{b}_n \right] d\Omega_n = 0.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Onde os termos intermediários em  $n + \alpha$  são interpolados pelo  $\alpha$ -generalizado, como em  $(\mathbf{x}^h)_{n+\alpha} = \mathbf{x}_n^h + \alpha_f (\mathbf{x}_{n+1}^h - \mathbf{x}_n^h)$ ;  $\mathbf{e} \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha} = \ddot{\mathbf{x}}_n^h + \alpha_m (\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^h - \ddot{\mathbf{x}}_n^h)$ . Destaca-se que os termos  $J^h$ ,  $\mathbf{F}^h$ ,  $\mathbf{E}^h$  e  $\dot{\mathbf{E}}^h$  possuem como referência o último passo de tempo  $\Omega_n$ , devido ao contexto da formulação lagrangiana parcialmente atualizada.

## 5.4 Solução numérica do sistema não linear

As equações governantes da dinâmica dos fluidos contínuas do capítulo 4 formam um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) não lineares em termos de posições e pressões. Aplicando a cinemática discreta da seção 5.1 em conjunto com a integração numérica apresentada na seção 5.3 transforma-se um sistema de EDPs não lineares em um sistema de equações algébricas não lineares. Nesse sentido, a fim de obter uma solução do sistema não linear utiliza-se o Método de Newton-Raphson (MNR), seguindo o mesmo procedimento adotado na seção 3.4.

### 5.4.1 Resíduo numérico

Substituindo as aproximações temporais nas equações governantes estabilizadas no passo intermediário do integrador  $\alpha$ -generalizado, chega-se nas definições dos resíduos numéricos das equações governantes, dadas por

$$\mathbf{r}_{mov}(\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1}) = -\mathbf{Q}_{n+\alpha_f}^{ext} + \mathbf{Q}_{n+\alpha_f}^{int} + \mathbf{Q}_{n+\alpha_m}^{iner} = \mathbf{0} \tag{5.43}$$

e

$$\mathbf{r}_{inc}(\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1}) = (\mathbf{c}_{inc})_{n+\alpha_f} + (\mathcal{S}_{PSPG})_{n+\alpha_f} = \mathbf{0}; \tag{5.44}$$

os quais devem ser nulos na convergência do processo iterativo. Onde  $\mathbf{r}_{mov}$  refere-se ao resíduo numérico da equação de quantidade de movimento durante o processo iterativo do MNR;  $\mathbf{r}_{inc}$  refere-se ao resíduo da equação de incompressibilidade estabilizada.

Expandindo (5.43) e (5.44) em série de Taylor (ver seção (3.4) para mais detalhes) e desprezando os termos de ordem superior dessas equações obtém-se um sistema linear dado por:

$$\mathbf{r}_{mov}((\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1})_k) + \frac{\partial \mathbf{r}_{mov}((\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1})_k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \cdot (\Delta \mathbf{X}_{n+1})_k + \frac{\partial \mathbf{r}_{mov}((\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1})_k)}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \cdot (\Delta \mathbf{p}_{n+1})_k \approx \mathbf{0} \quad (5.45)$$

e

$$\mathbf{r}_{inc}((\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1})_k) + \frac{\partial \mathbf{r}_{inc}((\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1})_k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \cdot (\Delta \mathbf{X}_{n+1})_k + \frac{\partial \mathbf{r}_{inc}((\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1})_k)}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \cdot (\Delta \mathbf{p}_{n+1})_k \approx \mathbf{0}. \quad (5.46)$$

Esse sistema é construído para cada configuração tentativa do processo de iteração do Método de Newton-Raphson até que o resíduo numérico seja mínimo ou nulo.

Esse sistema linear para a configuração tentativa pode ser melhor compreendido na forma matricial, como dado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{mov}}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{r}_{mov}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{inc}}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{r}_{inc}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} (\Delta \mathbf{X}_{n+1}) \\ (\Delta \mathbf{p}_{n+1}) \end{bmatrix}_k = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{mov} \\ \mathbf{r}_{inc} \end{bmatrix}_k. \quad (5.47)$$

Esse sistema pode ser resolvido implicitamente para  $[(\Delta \mathbf{X}_{n+1})_k, (\Delta \mathbf{p}_{n+1})_k]$  por algum solucionador direto ou iterativo. De forma alternativa, o sistema pode ser resolvido de forma explícita pela inversão da matriz tangente. Ressalta-se que a inversão direta não é a melhor estratégia para grandes sistemas como em dinâmica de fluidos, nesse sentido recomenda-se a utilização de solucionadores implícitos ou iterativos.

Após o cálculo dos incrementos  $[(\Delta \mathbf{X}_{n+1})_k, (\Delta \mathbf{p}_{n+1})_k]$  realizam-se as correções das variáveis de pressão e posição da  $k$ -ésima iteração e calculam-se as novas pressões e posições tentativas para a iteração  $k + 1$ , conforme as equações

$$(\mathbf{X}_{n+1})_{k+1} = (\mathbf{X}_{n+1})_k + (\Delta \mathbf{X}_{n+1})_k \quad (5.48)$$

e

$$(\mathbf{p}_{n+1})_{k+1} = (\mathbf{p}_{n+1})_k + (\Delta \mathbf{p}_{n+1})_k. \quad (5.49)$$

## 5.4.2 Matriz tangente

Desprezando-se os termos em que aparecem as derivadas da parcela desviadora de  $\mathbf{S}$ , bem como a variação de  $\tau_{PSPG}$ , a matriz tangente para o método de Newton-Raphson pode ser escrita como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{mov}}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{r}_{mov}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{inc}}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{r}_{inc}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_M + \alpha_f \mathbf{M}_K + \alpha_f \mathbf{M}_p & \mathbf{M}_G \\ \alpha_f \mathbf{M}_G^T + \frac{\alpha_f}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_M^{PSPG} & -\mathbf{M}_p^{PSPG} \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

A matriz de massa  $\mathbf{M}_M$  é dada por:

$$\mathbf{M}_M = \int_{\Omega_n} \rho_n \phi \otimes \phi d\Omega_n. \quad (5.51)$$

A matriz de viscosidade  $\mathbf{M}_K$  é escrita conforme segue em:

$$\mathbf{M}_K = \int_{\Omega_n} \left( \frac{\partial \mathbf{S}'^h}{\partial \mathbf{X}_{n+\alpha_f}} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+\alpha_f}} + \mathbf{S}'^h : \frac{\partial^2 \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+\alpha_f} \otimes \partial \mathbf{X}_{n+\alpha_f}} \right) d\Omega_n. \quad (5.52)$$

A matriz volumétrica  $\mathbf{M}_p$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_p = & \int_{\Omega_n} p^h J \left( \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+\alpha f}} : (\mathbf{C}^h)^{-1} \otimes (\mathbf{C}^h)^{-1} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+\alpha f}} \right) d\Omega_n + \\ & + \int_{\Omega_n} 2p^h J \left( \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+\alpha f}} : \mathfrak{L} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+\alpha f}} \right) d\Omega_n + \int_{\Omega_n} p^h J (\mathbf{C}^h)^{-1} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+\alpha f} \otimes \partial \mathbf{X}_{n+\alpha f}} d\Omega_n. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Onde  $\mathfrak{L}$  refere-se ao tensor simétrico de quarta ordem da mecânica do contínuo (aplicações desse tensor em mecânica do contínuo podem ser encontradas em Avancini (2023), Avancini *et al.* (2024) e Oñate e Carbonell (2014)), dado por:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}). \quad (5.54)$$

A matriz gradiente  $\mathbf{M}_G$ , conforme nomenclatura de Avancini (2023), denota a variação das forças internas volumétricas em relação aos valores nodais da pressão e é dada por:

$$\mathbf{M}_G = \int_{\Omega_n} J \phi \cdot (\mathbf{C}^h)^{-1} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{X}_{n+\alpha f}} d\Omega_n. \quad (5.55)$$

A matriz de estabilização devido a variação nas posições  $\mathbf{M}_M^{PSPG}$  é dada por:

$$\mathbf{M}_M^{PSPG} = \int_{\Omega_n} \tau_{PSPG} \nabla_n \phi \cdot (\mathbf{F}^h)^{-1} \cdot \phi d\Omega_n. \quad (5.56)$$

A matriz de estabilização devido a variação nas pressões  $\mathbf{M}_p^{PSPG}$  é escrita como:

$$\mathbf{M}_p^{PSPG} = \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{PSPG}}{\rho_n} J \nabla_n \phi \cdot (\mathbf{C}^h)^{-1} \cdot \nabla_n \phi d\Omega_n. \quad (5.57)$$

## 5.5 Condições de contorno e iniciais

No domínio do fluido podem haver contornos de Neumann  $\Gamma^N$  e de Dirichlet  $\Gamma^D$ . Em problemas de Interação Fluido Estrutura também existem contornos mistos  $\Gamma^{IFE}$ .

Na superfície livre do escoamento, forças de superfície são aplicadas com condições de Neumann  $\Gamma^N$ , como definido pela equação

$$\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}^{sup}, \quad em \quad \Gamma^N. \quad (5.58)$$

Onde  $\mathbf{f}^{sup} = \mathbf{0}$  no caso de escoamentos de superfície livre;  $\mathbf{n}$  denota o versor normal à superfície  $\Gamma^N$ ;  $\boldsymbol{\sigma}$  refere-se às tensões de Cauchy que podem ser calculadas como apresenta a equação

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T}{J}. \quad (5.59)$$

Nos contornos com paredes fixas ocorrem condições de Dirichlet para o domínio de fluido, conforme apresenta a equação

$$\mathbf{x}_{n+1} = \bar{\mathbf{x}}, \quad em \quad \Gamma^D. \quad (5.60)$$

Onde  $\bar{\mathbf{x}}$  denota a posição prescrita no contorno de Dirichlet.

Em se tratando de condições iniciais, essas podem ser aplicadas naturalmente pela utilização do integrador temporal  $\alpha$ -generalizado, o qual utiliza explicitamente os valores de

velocidade e aceleração para a integração temporal. Nota-se que a aplicação de uma velocidade inicial no contexto deste trabalho não produz resultados como no caso de uma formulação baseada uma seção de controle. Nesse sentido, o contorno com velocidade prescrita se move, pela abordagem lagrangiana adotada neste trabalho. Assim, para a simulação de condições de entrada e saída em fluidos, pela descrição lagrangiana, torna-se necessário a utilização de técnicas adicionais para estender a formulação, conforme desenvolvido na seção 6.2.

No contexto deste trabalho, ainda existem condições de contorno mistas, devido à Interação Fluido-Estrutura  $\Gamma^{IFE}$ . Nessa interface ocorre o contato do fluido com a estrutura, onde as tensões no fluido podem alterar a geometria da estrutura e a deformação da estrutura pode alterar o estado de tensões no fluido, conforme descrito no capítulo 8.



## Capítulo 6

# Método dos Elementos Finitos e Partículas aplicado a fluidos

Este capítulo descreve os fundamentos do Método dos Elementos Finitos e Partículas (PFEM) em sua abordagem baseada em posições. Esse método permite a análise de escoamentos de superfície livre com grandes mudanças topológicas, como pode ser visto em Avancini (2023), Avancini *et al.* (2024).

Os métodos numéricos tradicionais em dinâmica dos fluidos apresentam dificuldades no tratamento de escoamentos com mudanças topológicas no domínio do fluido. No caso dos escoamentos de superfície livre, é comum notar mudanças topológicas muito severas com constantes alterações nas interfaces do fluido principal com a atmosfera, com constante separação e união de partes do domínio, como é o caso de ondas quebrando sobre sólidos. A descrição euleriana, embora muito adequada para representar problemas com distorções indefinidas, trabalha com malha fixa, logo faz-se necessário o emprego de técnicas adicionais somente para permitir a consideração de fronteiras móveis.

Como mencionado em 1.1.2, formulações alternativas surgiram para permitir a representação de problemas com contornos móveis. No contexto dos escoamentos com superfícies livres, a descrição lagrangiana torna-se natural e direta para os casos com distorções finitas. Já para escoamentos com grandes distorções, bem como com mudanças topológicas, torna-se essencial a aplicação de técnicas de remalhamento a fim de manter a qualidade da malha em conjunto com a análise de grandes distorções do domínio.

Nesse contexto, surge o PFEM, um método baseado em uma formulação lagrangiana que utiliza o conceito de partícula para tratar o remalhamento de forma simplificada e direta junto ao Método dos Elementos Finitos. No MEF tradicional, as propriedades são definidas por elemento finito, já a proposta do PFEM é tratar os nós como partículas a fim de permitir a definição e transmissão das propriedades após um remalhamento. Essa concepção permite que a malha seja destruída e reconstruída inúmeras vezes sem etapas adicionais para a definição dos

valores nodais, permitindo análises de escoamentos com distorções indefinidas e com mudanças topológicas com o emprego de uma descrição lagrangiana.

Portanto, pode-se resumir o PFEM como uma técnica que une conceitos de partículas com uma abordagem macroscópica contínua, aliando as vantagens de ambos métodos para a análise de fenômenos complexos da dinâmica dos fluidos e de Interação Fluido-Estrutura. De forma metodológica, nota-se que a construção do PFEM se dá simplesmente pela expansão e conexão dos conceitos do MEF com técnicas de remalhamento.

## 6.1 Estrutura do PFEM

No presente contexto, define-se uma partícula como um ponto material que carrega as propriedades físicas do fluido ao qual pertence, tais como densidade e viscosidade, bem como as variáveis do problema como pressão e velocidade (ou posição). Essa é a principal diferença para o MEF tradicional, o qual define e transmite as propriedades por elemento e não por partícula (Idelsohn *et al.*, 2004).

A abordagem conjunta de partícula com o MEF permite gerar um domínio contínuo e incompressível, contudo também permite a possibilidade de separação quando submetido a forças de tração (Idelsohn *et al.*, 2004). Essa é a característica que permite o PFEM simular escoamento com quebra de ondas e desprendimento de partículas.

No PFEM, é gerada uma nova malha contínua e diferenciável por partes, de acordo com as mesmas técnicas do Método dos Elementos Finitos tradicional. Essa malha fornece as funções de forma que permitem discretizar espacialmente a solução das equações de Navier-Stokes, e consequentemente permitem a avaliação das forças de interação entre as partículas e resolver a equação do movimento. Essa malha pode então ser apagada e outra pode ser gerada a cada nova configuração das partículas, ou sempre que houver o comprometimento da qualidade da malha atual, mantendo-se os valores nodais (das partículas) ao longo do tempo. Para a reconstrução da malha sem comprometer a definição do domínio, emprega-se o método de Triangulação de Delaunay com o método  $\alpha$ -*shape* para a identificação dos contornos.

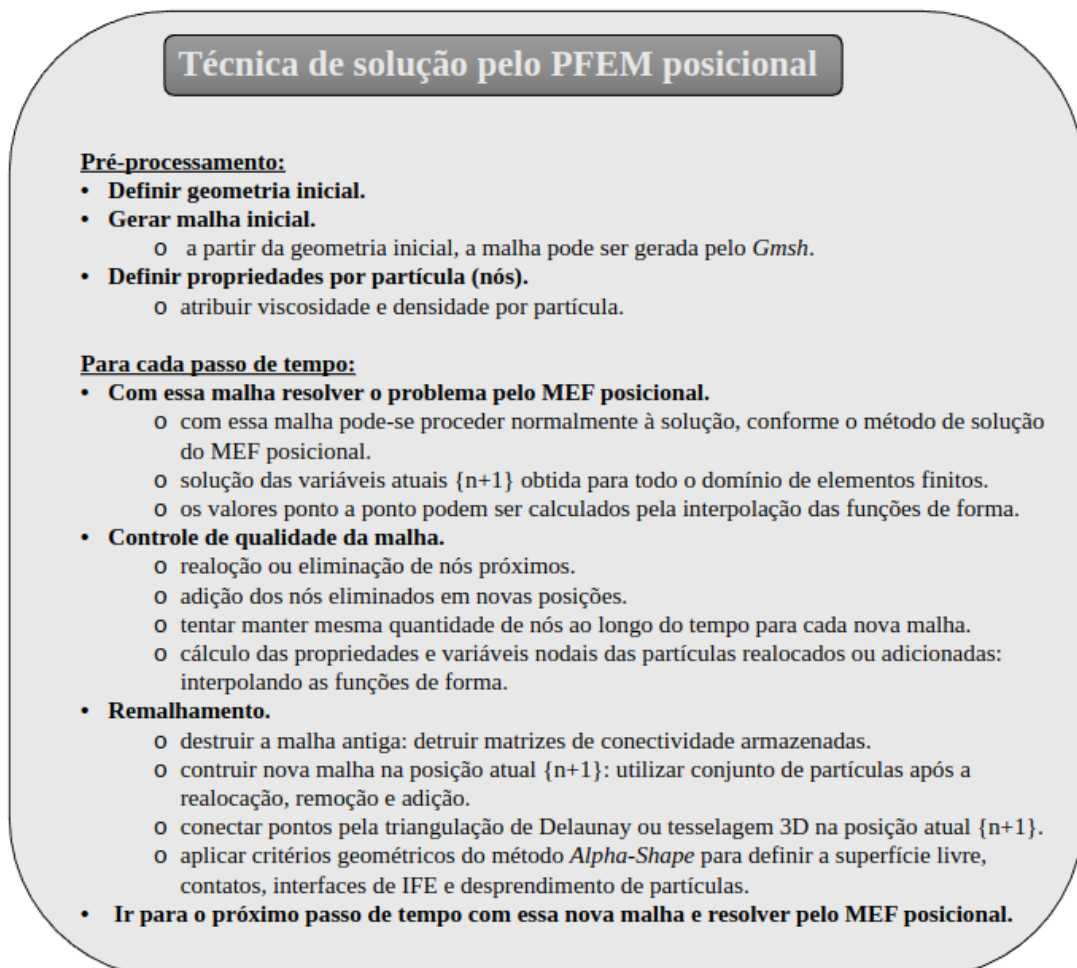
No entanto, o fato de que os fluidos newtonianos não resistem às tensões de cisalhamento, faz com que algumas partículas possam se aproximar muito, implicando em má qualidade da malha, com elementos muito distorcidos ou muito pequenos. Nesse sentido, podem ser empregadas técnicas de realocação de partículas antes que a nova malha seja gerada, com os valores nodais interpolados para a posição em que são realocadas utilizando as funções de forma da última discretização, garantindo assim a qualidade da malha.

Como já mencionado, a forma tradicional do PFEM adota velocidades como variáveis do problema, o que demanda uma etapa adicional para atualização das posições das partículas por meio de integração numérica. Inspirados nos trabalhos de Bonet *et al.* (2000), Coda (2018) e

Coda (2003) para sólidos e estruturas, Avancini *et al.* (2024) propõem uma abordagem do PFEM onde os parâmetros variacionais são as posições atuais das partículas. Além de eliminar a etapa de atualização das posições das partículas, uma vez que essas já são as incógnitas do problema, essa formulação possui a vantagem de permitir de forma direta o acoplamento monolítico com estruturas em descrição lagrangiana, fornecendo um equacionamento e uma implementação mais compacta, além de eficiente para problemas fortemente acoplados.

A Figura 18 apresenta a sequência dos passos da solução em um código de PFEM com a abordagem baseada em posições. Nota-se que o PFEM consiste basicamente no acoplamento de uma técnica de remalhamento com o Método dos Elementos Finitos, de modo que seja permitido considerar os nós dos elementos finitos como se fossem partículas, estando limitada a elementos triangulares e tetraédricos de aproximação linear.

Figura 18 – Passos do Método dos Elementos Finitos e Partículas baseado em posição.



Fonte: Autoria Própria.

Ressalta-se, contudo, que ao se alterar a conectividade entre os nós pela substituição da malha, a solução calculada no passo de tempo anterior não mais satisfaz à condição de equilíbrio e incompressibilidade na nova malha (Avancini, 2023), ainda que na forma fraca. Nota-se, porém, que essa perturbação é pequena e diminui com o refinamento da discretização espacial. Além

disso, surgem dificuldades quanto à simulação de escoamentos não newtonianos ou de sólidos elásticos, os quais dependem da história de deformação. Apesar disso, o PFEM, empregando a descrição lagrangiana atualizada, tem sido aplicada com sucesso nesses casos (Larese, 2017; OLIVER *et al.*, 2007). É interessante destacar que, como o modelo constitutivo para fluidos newtonianos induz a uma relação dependente da taxa de deformação para o tensor de tensões, não há dependência da história de deformação do meio contínuo, não havendo necessidade de aproximações para se determinar contribuição de tensão de passos anteriores.

Por fim, cabe notar que o remalhamento, juntamente com o critério geométrico do método  $\alpha$ -*shape* para a redefinição dos contornos, adicionam erros em termos da conservação da massa. Estudos no entanto mostram a convergência da conservação da massa com o refinamento da discretização espacial (Avancini, 2023).

### 6.1.1 Remalhamento

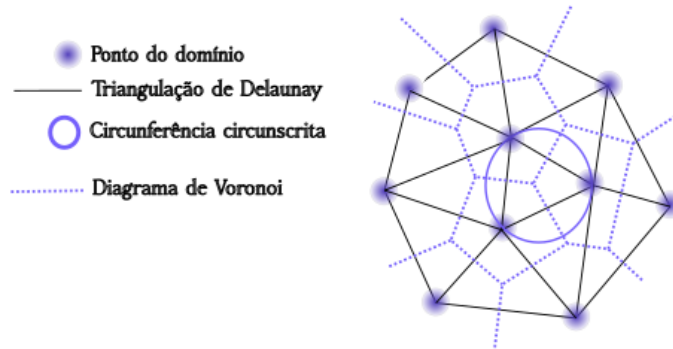
No PFEM, o remalhamento busca preservar os nós da malha anterior, que são tratados como partículas, permitindo que as informações sejam transferidas diretamente para a nova malha, sendo, sempre que possível, apenas a conectividade refeita. Para isso, adota-se o processo de triangulação de Delaunay (Edelsbrunner; Tan, 1993), ou também chamado tetraedralização de Delaunay para malhas 3D, junto ao método  $\alpha$ -*shape* (Edelsbrunner, 1992; Edelsbrunner; Mücke, 1994) para a definição do domínio. Nota-se que o remalhamento promove a conexão fundamental entre o conceito de partículas e o Método dos Elementos Finitos, sendo a base do PFEM.

Dada uma triangulação qualquer de um conjunto de pontos do domínio  $\Omega^h$ , esta é definida como de Delaunay se, e somente se, a circunferência que circunscreve cada um dos triângulos gerados for vazia (Piteri *et al.*, 2007). Ou seja, essa circunferência não deve conter nenhum outro ponto do domínio, conforme ilustra a Figura 19. Essa característica também é conhecida como critério de Delaunay e permite identificar uma triangulação de Delaunay em uma dada malha não estruturada. Nota-se que, a Figura 19 ilustra as três principais subdivisões planares resultantes de um dado conjunto de pontos: triangulação de Delaunay; diagrama de Voronoi; e fecho convexo.

A triangulação de Delaunay se destaca das demais técnicas de tecelagem (conexão de pontos formando uma malha ou rede), pois apresenta duas propriedades fundamentais. A primeira refere-se ao fato de permitir maximizar o menor ângulo interno (Avancini, 2023), de forma e evitar a criação de elementos altamente distorcidos ou com áreas quase nulas sempre que a distribuição de pontos permitir. A segunda propriedade deve-se à unicidade de solução para um dado conjunto de pontos, desde que não haja mais do que três pontos em uma mesma circunferência (Avancini, 2023; Piteri *et al.*, 2007).

Conforme ilustra a Figura 19, o fecho convexo coincide com a fronteira da triangulação de Delaunay. De forma mais precisa, o fecho convexo é definido como o menor conjunto convexo que contém todos os pontos do domínio (Piteri *et al.*, 2007).

Figura 19 – Triangulação de Delaunay e diagrama de Voronoi.



Fonte: Autoria Própria.

Segundo Avancini (2023) e Piteri *et al.* (2007), uma região de Voronoi particiona a envoltória do fecho convexo em sub-regiões convexas  $V_i$ , onde cada sub-região  $V_i$  contém um único ponto  $P_i$ . Além disso, é uma condição necessária que qualquer ponto  $X_k$  dessa região esteja mais próximo do ponto de Voronoi  $P_i$  do que de qualquer outro ponto  $P_j$  do conjunto de pontos inicial, conforme matematicamente definido pela equação:

$$V_i = \{X_k \in \mathbb{R}^n \mid d(X_k, P_i) \leq d(X_k, P_j)\} \quad \forall \quad i \neq j, \quad (6.1)$$

onde  $\mathbb{R}^n$  denota o espaço euclidiano do domínio 2D ou 3D;  $d(X_k, P_i)$  representa a medida de distância entre as coordenadas  $X_k$  e  $P_i$ , dada pela norma  $L_2$ .

A região formada pelo conjunto de pontos que atende à equação (6.1) é denominada de célula de Voronoi. Sendo, o diagrama de Voronoi definido como o conjunto de cada uma dessas regiões de Voronoi (Piteri *et al.*, 2007).

A triangulação de Delaunay pode ser construída a partir da conexão dos pontos de Voronoi que possuem um contorno em comum, conforme já ilustrado pela Figura 19. Nesse sentido, após a construção do diagrama de Voronoi, a construção da triangulação de Delaunay é imediata.

A triangulação clássica de Delaunay também é caracterizada como uma triangulação ótima que minimiza o erro de interpolação para um dado conjunto de vértices entre todas as triangulações com o mesmo número de vértices, ou seja, a distribuição de vértices é otimizada de forma a minimizar o erro de interpolação (Chen; Xu, 2004). Nota-se que a triangulação ótima de Delaunay é difícil de se obter na prática, nesse sentido alguns trabalhos propõem a busca por soluções quase-ótimas, como em Chen e Xu (2004) e Navarro *et al.* (2014).

No caso 3D, muitos algoritmos têm sido desenvolvidos para construção de malhas não estruturadas no ambiente tridimensional. Entre as técnicas desenvolvidas, destacam-se as baseadas em critérios de Delaunay, como pode ser visto em Baker (1989), Frey *et al.* (1996) e Si (2010). Embora exista muitos trabalhos que abordam a geração de malha, ainda existem muitos problemas fundamentais de malhas tridimensionais, tanto em termos teóricos quanto na prática

(Si, 2010).

Nesse sentido, a fim de aproveitar a disponibilidade de algoritmos eficientes, no presente trabalho, a triangulação de Delaunay (caso 2D) e a tetraedralização de Delaunay (caso 3D) são utilizadas e aplicadas por meio dos programas *Triangle* (SHEWCHUK, 1996) e *TetGen* (SI, 2015), como já empregados por Avancini (2023).

### 6.1.2 Definição dos contornos

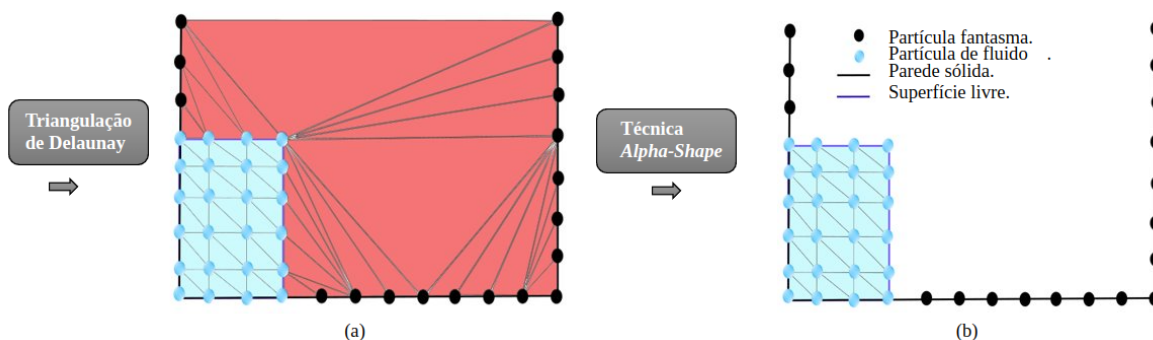
A triangulação de Delaunay produz sempre uma malha convexa que engloba todos os pontos. Isso implica em uma malha que não é conforme com o domínio físico do problema (esse estará sempre contido dentro desta malha), com elementos de diversos tamanhos, alguns altamente distorcidos. Assim, há a necessidade de se eliminar os elementos excedentes ao domínio, redefinindo os contornos no problema.

A Figura 20 ilustra a geração dos elementos distorcidos pela triangulação de Delaunay. Como a região de fluido possui maior densidade de partículas, os elementos gerados nessa região são mais uniformes, enquanto a conexão da superfície livre com as paredes limites geram elementos grandes ou distorcidos.

Para garantir a definição das paredes emprega-se uma técnica que consiste em distribuir partículas sobre o contorno com uma distribuição igual ao comprimento característico da malha, mantendo-as fixas a esses contornos. Essas partículas são denominadas partículas fantasmas, e podem estar em contato com o domínio fluido ou não. Isso permite detectar de forma automática os contatos fluido-parede, desde que os elementos altamente distorcidos gerados pela triangulação de Delaunay sejam eliminados.

Assim, após reestabelecida a conectividade da malha, aplica-se o critério geométrico da técnica  $\alpha$ -shape (Edelsbrunner, 1992; Edelsbrunner; Mücke, 1994) para a identificação dos contornos que geram domínio(s) consistente(s) com o problema físico, definindo assim as interfaces atuais de contato fluido-sólido, superfície livre e partículas livres.

Figura 20 – Técnica Alpha-Shape para a detecção da superfície livre.



Fonte: Autoria Própria.

O critério da técnica  $\alpha$ -*shape* para a eliminação de elementos é geométrico, tal que, após a triangulação de Delaunay, para cada elemento calcula-se o raio da circunferência (2D), ou da esfera (3D), circunscrita  $r_e$  e o elemento é removido se não atender à condição (Avancini, 2023):

$$r_e > \alpha h_e. \quad (6.2)$$

onde  $h_e$  denota o comprimento característico da malha, dado pela distância média entre as partículas do domínio, calculado para a primeira malha empregada;  $\alpha$  representa um parâmetro arbitrário do método, cuja função é a de controlar a máxima distorção permitida para os elementos da malha.

A escolha do parâmetro  $\alpha$  determina a quantidade de elementos removida após a tesselação de Delaunay, de tal maneira que  $\alpha \rightarrow +\infty$  implica em nenhuma remoção, pois o critério (6.2) nunca será satisfeito. Já para  $\alpha \rightarrow 0^+$  conduz à total remoção dos elementos da malha, transformando o domínio em um conjunto de partículas livres, pois qualquer valor de raio circunscrito atenderá automaticamente ao critério do  $\alpha$ -*shape*.

Em termos práticos, a literatura referente ao PFEM recomenda  $1,2 < \alpha < 1,5$  como sendo uma boa escolha para a maioria das aplicações (CERQUAGLIA *et al.*, 2017). Avancini (2023) apresenta variações paramétricas do fator  $\alpha$ , mostrando a influência na captura do contato entre domínios e na definição dos contornos. Nesse trabalho, uma análise da variação do volume para diferentes valores de  $\alpha$  também é realizada, mostrando a detecção de um valor ótimo  $\alpha = 1,15$  para o caso 2D analisado e  $\alpha = 1,20$  para o caso 3D.

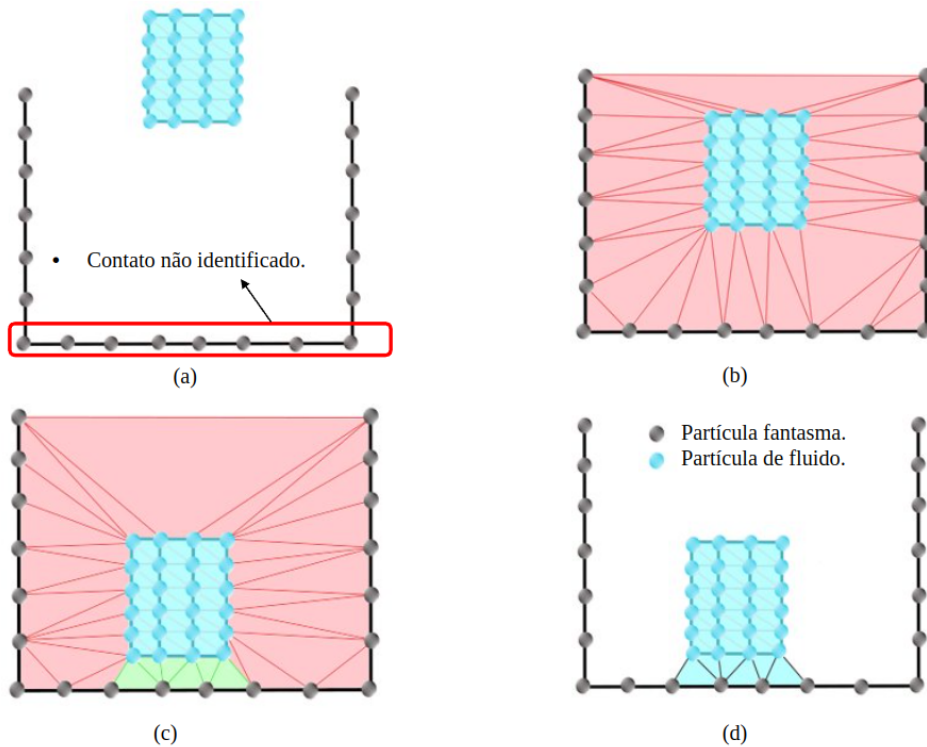
A técnica geométrica do  $\alpha$ -*shape* permite a identificação automática de contatos com paredes e estruturas, entre partes da superfície livre ou de domínios separados e entre partículas. Esse processo pode ser visualizado na Figura 21, que ilustra a malha gerada pela triangulação de Delaunay em duas situações, onde na segunda situação (Figs. 21 (c) e (d)) há ocorrência de contato com uma parede sólida.

Nota-se que, nesse modelo, as partículas fantasmas são de fundamental importância. Em termos práticos, essas partículas sempre fazem parte do processo de Delaunay e são criadas em todos os contornos onde possa haver contato sólido/fluido. Nesse sentido, tais partículas apenas contribuem com o sistema do fluido caso pertençam a pelo menos um elemento que passe pelo critério do  $\alpha$ -*shape*, ou seja, apenas quando o fluido se aproxima da partícula fantasma o suficiente para que se considere situação de contato.

### 6.1.3 Controle de qualidade da malha

Como já observado, dadas as características do meio fluido, ao longo do processo de solução, o domínio deforma-se indefinidamente, podendo apresentar grandes distorções ou mesmo mudanças topológicas devidas aos efeitos de superfície livre ao contato entre sólidos imersos. Nesse contexto, partículas podem se aproximar demasiadamente de maneira que apenas o processo Delaunay- $\alpha$ -*shape* não é capaz de garantir uma malha de qualidade, implicando

Figura 21 – Definição do contorno e detecção de contato com a técnica  $\alpha$ shape.



Fonte: Autoria Própria.

em elementos com volumes (ou áreas) muito próximos de zero. Isso acaba por prejudicar o condicionamento do sistema e provocar erros numéricos na solução.

Para que isso seja evitado, partículas muito próximas devem ser realocadas de acordo com critérios específicos. As partículas marcadas para a realocação são para as maiores arestas de elementos finitos que fazem parte da discretização atual, de forma a buscar uniformização na distribuição de partículas no domínio.

Essa realocação não deve afetar a definição dos contornos, assim tanto as partículas da superfície livre como as partículas fantasmas não são removidas. Essa abordagem conduz a uma distribuição mais regular das partículas dentro dos domínios fluidos, e consequentemente, a malhas mais uniformes ao longo da simulação.

## 6.2 Condições de contorno especiais no contexto lagrangiano do PFEM

Em formulações eulerianas para fluidos, ou mesmo na descrição Lagrangiana Euleriana Arbitrária, a aplicação de condições de entrada ou saída sobre um contorno espacialmente fixo é direta, bastando a definição das interfaces e a imposição das velocidades ou da força de superfície, como pode ser visto em Fernandes (2020) e Fernandes (2016).

Isso ocorre porque o movimento das partículas é independente do movimento da malha, ou seja, a ocorrência de velocidades não nulas nos contornos não implica em movimento da malha. O mesmo ocorre nos casos de paredes lisas, onde a componente tangencial de velocidade do escoamento pode ser deixada livre sem implicar em movimentação da malha.

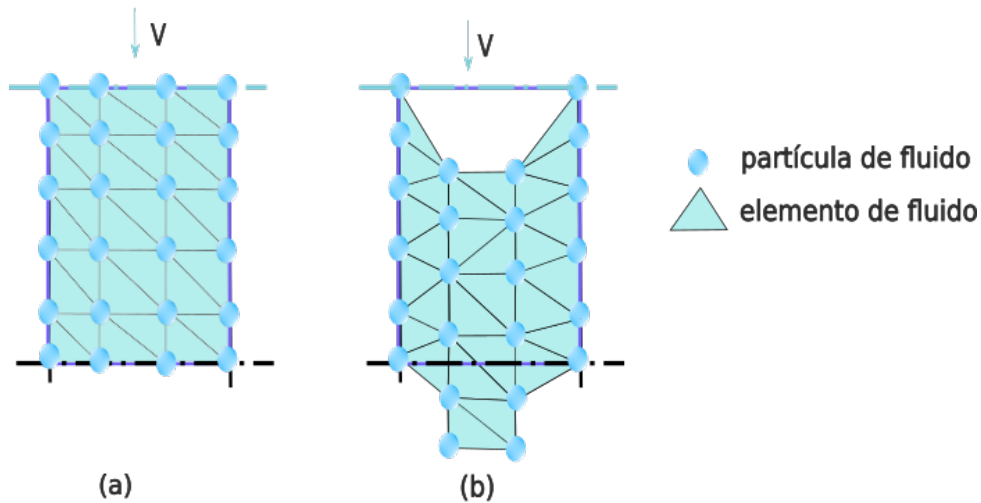
O PFEM, com a técnica das partículas fantasmas, torna-se uma ferramenta muito poderosa para a simulação de escoamentos com mudanças topológicas, no entanto a técnica apresenta algumas limitações importantes. As paredes e interfaces automaticamente impõem condição de aderência ao escoamento, sendo que, caso seja aplicada restrição de deslocamento para as partículas fantasmas que representam as paredes apenas na direção normal, isso implica em distorção e na indefinição desse contorno. Por empregar uma descrição lagrangiana, também não é possível prescrever um contorno espacialmente fixo com fluxo entrando ou saindo do domínio, seja esse fluxo livre (contorno de Neumann), ou prescrito (contorno de Dirichlet). Todo o contorno de Neumann ou contorno de Dirichlet com movimento não nulo implica na deformação desse contorno.

Nesse contexto, visando ampliar a gama de aplicações da ferramenta computacional desenvolvida, propõe-se neste trabalho técnicas numéricas que permitam a simulação de escoamentos com contornos espacialmente fixos com entrada e/ou saída de fluido, bem como a consideração de paredes lisas. Isso permite inclusive a simulação de problemas tipicamente definidos em descrição espacial (euleriana), tais como escoamentos em domínios abertos ou em dutos e canais.

### 6.2.1 Escoamentos com fluxos de entrada e saída

Os trabalhos em geral que empregam a descrição lagrangiana, incluindo os relacionados ao PFEM, tratam apenas de escoamentos com um volume de fluido constante em um domínio fechado, sem a aplicação de condições de entrada e de saída, como em Avancini *et al.* (2024) e Moreira (2021). Isso ocorre porque, embora essa abordagem facilite o acoplamento com sólidos deformáveis, a aplicação de condições de entrada e saída, ou mesmo a imposição de velocidades, causa a movimentação da malha e descaracteriza o domínio do escoamento, como ilustrado pela Figura 22. A Figura 22 (a) ilustra a condição inicial de uma tubulação com escoamento contínuo, onde, na face superior ocorre a entrada e na face inferior a saída, além disso considera-se condição de escorregamento nas paredes para ilustrar bem a movimentação da malha; a Figura (b) apresenta uma ilustração do resultado obtido com o PFEM após alguns passos de tempo com a aplicação direta de velocidade na superfície superior e força de superfície nula na face inferior. Observa-se que a descrição material do fluido resulta na movimentação real dos contornos da malha do domínio, portanto fica evidente a necessidade de alguma técnica adicional para a aplicação de condições de entrada e saída fixas no contexto de descrições lagrangianas (como PFEM).

Figura 22 – Simulação do escoamento em uma tubulação em descrição lagrangiana.



Fonte: Autoria Própria.

Assim, propõe-se aqui um tratamento diferenciado no processo de reconstrução da malha de modo a permitir a simulação de entrada e saída de fluido de um domínio computacional. No caso dos contornos de entrada, durante cada passo de tempo, permite-se a movimentação das partículas de acordo com a velocidade, no entanto, ao final do passo de tempo, as partículas pertencentes ao contorno de entrada são realocadas para a sua posição inicial antes da reconstrução da malha, sendo seu valor de velocidade mantido constante caso a velocidade seja prescrita (ver Figura 23).

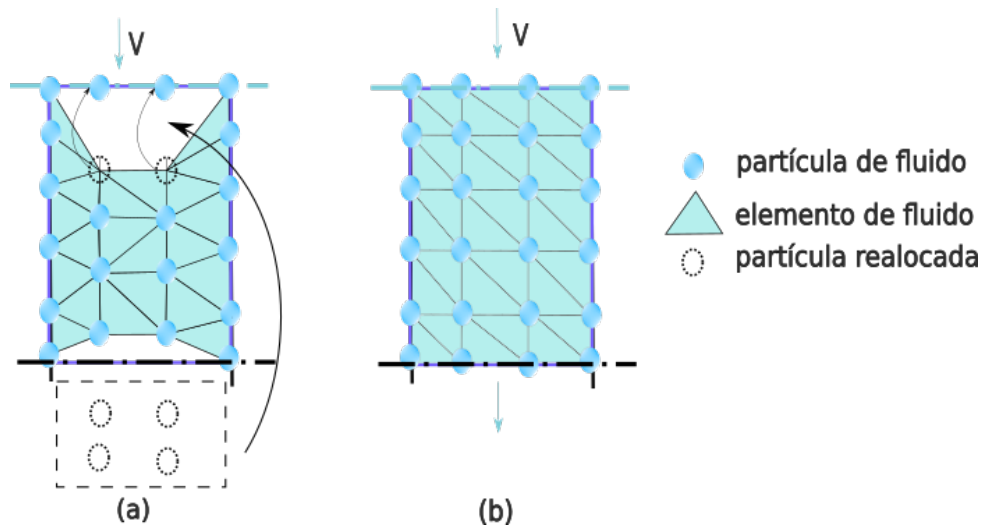
Nas regiões de saída, onde não há velocidade pré-definida, as partículas que passam pela interface de saída são marcadas para remoção e posterior realocação, juntamente com as partículas marcadas no processo de controle de qualidade da malha do PFEM, nas condições descritas em 6.1. Assim como nos processos de realocação de partículas já definidos anteriormente, as partículas devem ser realocadas em arestas que pertençam ao mesmo fluido, e os valores de velocidade e pressão das partículas realocadas são substituídos pelos valores interpolados para o centro da aresta onde essas partículas estão sendo inseridas. Esse processo é ilustrado pela Figura 23.

## 6.2.2 Contorno fixo com condição de Neumann

Em formulações eulerianas para fluidos, a aplicação de condições de contorno de Neumann também é direta, bastando a definição das interfaces e os valores nodais, como pode ser visto em Fernandes (2020) e Fernandes (2016). Nessa abordagem, os nós da malha são naturalmente fixos, não sendo necessário nenhum tratamento especial.

No entanto, em descrições lagrangianas torna-se necessário um tratamento especial para a

Figura 23 – Técnica de remalhamento no PFEM proposta: realocação de partículas para simular entrada e saída de materiais.



Fonte: Autoria Própria.

aplicação de condições de contorno de Neumann fixo, pois as partículas (incluindo os contornos) se movem materialmente com o escoamento, conseqüentemente o contorno se deforma e se movimenta com o fluxo de fluido. Nesse contexto, a fim de se poder aplicar condições de contorno de Neumann fixo mesmo utilizando uma descrição lagrangiana, propõe-se a técnica de realocação de partículas com interpolação das propriedades durante o remalhamento do PFEM.

Essa técnica permite a análise de escoamentos sem a necessidade de conhecimento prévio da vazão de entrada, como por exemplo a simulação do escoamento de Couette. Nesse problema, uma velocidade é prescrita na face superior e isso gera um gradiente de velocidades que se propaga pelo domínio até formar um perfil de velocidades linear e estacionário. Assim, prescrevendo a condição de Neumann fixo na entrada, as velocidades dessas partículas são atualizadas a cada passo de tempo até o regime permanente, e o contorno geométrico do problema não é perdido, apesar do movimento material das partículas.

### 6.2.3 Paredes lisas

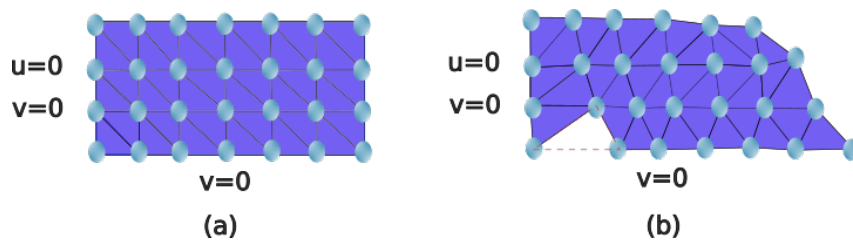
A aplicação de condições de deslizamento pode ser aplicada facilmente tanto com descrições eulerianas (Fernandes, 2020) quanto lagrangianas do MEF (Avancini, 2023). Para isso basta liberar a componente de movimento tangencial à parede lisa. Esse tipo de condição de contorno é particularmente útil quando a camada limite é muito estreita e pode ser desprezada, eliminando-se assim a necessidade de utilizar malhas muito refinadas nas proximidades das paredes.

No PFEM, como já mencionado, o processo de partículas fantasmas torna simples a imposição de condições de contorno de aderência no contato e na IFE. No entanto esse processo torna difícil permitir o deslizamento das partículas sobre as paredes, pois implica na distorção da

representação das paredes por meio das partículas fantasmas, podendo implicar em vazamentos artificiais, como ilustrado pela Figura 24, onde  $u = 0$  denota a condição de aderência na direção horizontal e  $v = 0$  denota a condição de aderência na vertical.

O vazamento artificial ocorre porque, com o movimento tangencial das partículas das paredes sem atrito, pode ocorrer o afastamento das partículas, especialmente entre partículas que estejam próximas de outros contornos, o que acaba por distorcer demasiadamente o elemento junto ao contorno associado a essas partículas. Esse elemento distorcido poderá ser indesejavelmente removido durante o remalhamento pelo  $\alpha$ -shape, promovendo uma abertura na parede.

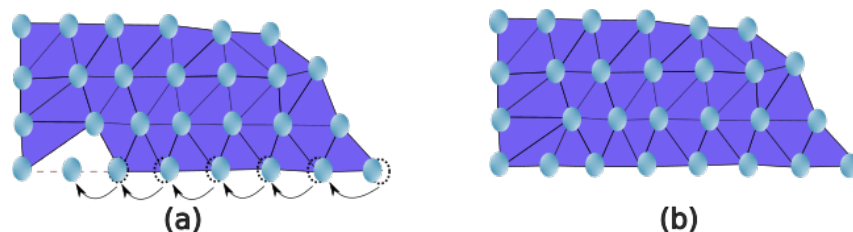
Figura 24 – Paredes lisas no PFEM: vazamento artificial impróprio pelo  $\alpha$ -shape.



Fonte: Autoria Própria.

Assim, a ideia fundamental da técnica proposta aqui consiste em permitir um deslizamento controlado, realocando-se as partículas sobre as paredes lisas em sua posição inicial após cada passo de tempo, com seus valores de velocidade e pressão sendo substituídos por valores interpolados no ponto mais próximo da sua posição original pertencente ao contorno da malha deformada antes da realocação, conforme ilustrado na Figura 25. Nota-se que os valores de velocidade, pressão e aceleração podem ser diferentes dos iniciais, assim também é necessário interpolar tais valores nas posições iniciais após a realocação.

Figura 25 – Técnica proposta para análise de paredes lisas com PFEM: realocação das partículas fantasmas.



Fonte: Autoria Própria.

### 6.3 Implementação computacional

Esta seção detalha os principais aspectos do tratamento computacional de escoamentos com entradas, saídas e paredes com deslizamento pelo PFEM.

O algoritmo 1 apresenta o pseudocódigo para a montagem do problema de escoamento com domínio aberto, destacando a incidência das condições de contorno especiais no contexto global do problema de escoamento com PFEM. A geometria é criada com pontos, linhas, superfícies e volumes em uma classe principal, que possui métodos para adicionar cada uma das condições de contorno especiais.

---

**Algoritmo 1:** Montagem do problema de escoamento com domínio aberto

---

```

1 geo ← Criar geometria (pontos, linhas, superfícies e volumes);
2 Definir condições de contorno;
3   geo → adicionarCondiçõesContorno, conforme algoritmo 2;
4     Condição de contorno de Dirichlet;
5     Condição de saída espacialmente fixa;
6     Condição de entrada espacialmente fixa com velocidade prescrita;
7     Condição de entrada espacialmente fixa com força de superfície prescrita;
8     Condição de parede lisa espacialmente fixa;
9   problem ← (geo → adicionar materiais);
10  problem → gerar malha;
11  problem → definir parâmetros do problema;
12  problem → resolver fluido com PFEM, conforme algoritmo 3;
```

---

Cada condição de contorno especial possui uma classe que armazena seus elementos geométricos, como pontos, linhas ou superfícies, com métodos para adicionar e acessar tais entidades. O algoritmo 2 ilustra genericamente a implementação das classes de condições de contorno especiais. Nota-se que os seus elementos são criados no contexto do algoritmo 1.

---

**Algoritmo 2:** Classe genérica para condição de contorno espacialmente fixa

---

```

1 início
2   Geometria::Adicionar condição de contorno especial(pontos){
3     Ente ← (linha, superfície ou ponto);
4     índice = fixedBoundary_.tamanho() - 1;
5     para cada Ente* ente em entes faça
6       | fixedBoundary_.emplace_back(criar ente geométrico fixo (++índice, ente));
7     fim
8   }
9 fim
```

---

O pseudocódigo do algoritmo 3 apresenta a estrutura geral do método de solução do problema de escoamento com PFEM. Isso permite localizar as etapas de aplicação das condições de contorno especiais no contexto global do PFEM. A ideia geral do algoritmo 3 consiste em resolver o problema de escoamento por meio do Método dos Elementos Finitos, aplicar o remalhamento com conceitos de partículas e controlar a qualidade malha. Para alcançar esse

objetivo, o método se fundamenta nas seguintes etapas principais: integração temporal, solução do problema não linear, montagem e solução do sistema linear, bem como o remalhamento.

Em termos práticos, o algoritmo inicia pela realização da montagem do vetor de forças externas e definição dos limites do domínio, mapeando pontos máximos e mínimos de entrada e saída. Tais parâmetros são utilizados no processo de remalhamento, auxiliando na definição de quais partículas saíram do domínio e devem ser removidas ou realocadas. Na sequência, o algoritmo itera sobre os passos de tempo, onde a função *executeMesh()* é chamada para avaliar a qualidade da malha e proceder com o remalhamento em termos da necessidade de refinamento adaptativo. Nessa malha atualizada, os nós vizinhos são mapeados para otimizar o processo de realocação de partículas dos contornos espacialmente fixos. A seguir, o material real mais próximo das paredes é aplicado às partículas fantasmas que formam os contornos especiais.

Em seguida, o algoritmo *executeSlip()* é chamado para tratar das condições de deslizamento. As variáveis do último instante equilibrado são atualizadas fazendo  $\Omega_n \leftarrow \Omega_{n+1}$ , as velocidades prescritas na entrada são redefinidas em *setInletVelocity()* e as variáveis intermediárias são calculadas pelo método  $\alpha$ -generalizado, conforme descrito na seção 5.3.2. A matriz e o vetor resíduo são inicializados com valores nulos, logo na sequência, o algoritmo de Newton-Raphson é aplicado para resolver o sistema não linear, conforme descrito na seção 5.4.

Para cada iteração do método de Newton-Raphson, as forças de superfície são computadas e o sistema linear é montado, conforme as seções 5.4.2 e 5.4.1. As condições de contorno de Dirichlet são aplicadas, o sistema linear é resolvido e as variáveis do problema são atualizadas. As regiões com contornos espacialmente fixos têm seus valores prescritos recuperados e as variáveis no instante intermediário são calculadas novamente pelo método  $\alpha$ -generalizado. Por fim, avalia-se a norma do erro de posição e de pressão, e caso ambas estejam abaixo da tolerância, o algoritmo é interrompido e o próximo passo de tempo é iniciado.

**Algoritmo 3:** Código Global de solvePFEMProblem

```

1 Função solvePFEMProblem()
2   Montagem das forças externas;
3   Definir limites do domínio para entrada e saída();
4   para timeStep = 0 a numberOfSteps - 1 faça
5     executeMesh(), conforme algoritmo 14;
6     Definir nós vizinhos na malha;
7     Tratar material das partículas fantasmas;
8     executeSlip();
9     Atualizar variáveis do passo anterior;
10    setInletVelocity();
11    Calcular variáveis no instante intermediário do método  $\alpha$ -generalizado, conforme
        5.3.2 ;
12    Inicializar o vetor resíduo rhs e a matriz do sistema tangente;
13    para iteração = 0 a máximoIterações - 1 faça
14      Computar forças de superfície (Neumann), conforme (5.58) ;
15      Montagem do sistema linear, conforme 5.4.2 e 5.4.1 ;
16      Aplicar condições de contorno de Dirichlet, conforme (5.60) ;
17      int fail = Solucionar sistema linear (tangente, rhs, solution);
18      Atualizar variáveis do problema, conforme (5.48) e (5.49) ;
19      recuperar valores de forças de superfície na entrada prescrita fixa ;
20      recuperar valores de velocidade na entrada prescrita fixa ;
21      Calcular variáveis no instante intermediário do método  $\alpha$ -generalizado,
        conforme 5.3.2 ;
22      se erro Posição  $\leq$  tolerância e erro Pressão  $\leq$  tolerância então
23        | break;
24      fim
25    fim
26  fim

```

O controle de qualidade da malha pelo refinamento adaptativo (realocação de partículas) é realizado no contexto do algoritmo *executeMesh* (14), com destaque para a função *removeMeshNodes* (4). Essa função é responsável por avaliar a qualidade da malha a cada passo de tempo, bem como reposicionar as partículas dos contornos espacialmente fixos e remover as partículas que saíram do domínio.

**Algoritmo 4:** Refinamento adaptativo da malha**Entrada:** nós, elementos, parâmetros**Saída:** Malha atualizada com nós removidos e realocados, conforme seção 6.1.3

---

```

1 Função removeMeshNodes(nós, elementos, parâmetros)
2   Inicializar contadores de nós removidos;
3    $h_{mesh} \leftarrow (\text{parâmetros} \rightarrow \text{getMeshLength});$ 
4    $\text{criticalVolume} \leftarrow \frac{0,1(h_{mesh}^3)}{6\sqrt{2}};$ 
5   Procurar elementos críticos  $\leftarrow$  slivers, volumes nulos, elementos próximos de
   paredes, conforme seção 6.1.3;
6   Remover partículas dos elementos críticos, desde que não sejam do contorno;
7   Remover partículas fora do domínio, conforme seção 6.2.1 e algoritmo 5;
8   Realocar partículas fantasmas nos contornos fixos de saída, conforme seção 6.2.1
   e algoritmo 6;
9   Realocar partículas fantasmas nos contornos de entrada com velocidade
   prescrita, conforme seção 6.2.1 e algoritmo 6;
10  Realocar partículas fantasmas nos contornos de entrada com força de superfície
   prescrita, conforme seção 6.2.2 e algoritmo 6;
11  Realocar partículas fantasmas nas paredes lisas, conforme seção 6.2.3 e algoritmo
   6;
12  Remover partículas muito próximas uma da outra na malha, desde que não sejam do contorno,
   conforme seção 6.1.3;

```

---

Os algoritmos 5 e 6 apresentam os detalhes da implementação da remoção e realocação de partículas no contexto das funções chamadas pelo algoritmo 4. O algoritmo 5 é responsável pela remoção das partículas que saíram do domínio, sendo que a delimitação do domínio é feita preliminarmente na geometria inicial, conforme apresentado no algoritmo 3. Por fim, o algoritmo 6 ilustra de forma genérica a realocação das partículas fantasmas, que parte do conceito de recuperação da geometria inicial, a fim de que os contornos espacialmente fixos sejam preservados mesmo na descrição Lagrangiana do escoamento. Após a realocação, os valores nodais são atualizados em função de valores na configuração atual da malha.

**Algoritmo 5:** Remover partículas fora do domínio

---

```

1 para cada nó em nós faça
2   se não nó.isToRemove() e não nó.isConstrained() e não nó.isInterface() então
3     pontoMínimo ← parâmetro.obterPontoLimiteMínimo();
4     pontoMáximo ← parâmetro.obterPontoLimiteMáximo();
5     se nó.obterGrauDeLiberdade().obterValorAtual() < pontoMínimo ou
6       nó.obterGrauDeLiberdade().obterValorAtual() > pontoMáximo então
7       nó.definirParaRemover(verdadeiro);
8   fim
9 fim

```

---

**Algoritmo 6:** Realocar partículas fantasmas nos contornos fixos

---

```

1 para cada nó nó em nós faça
2   ndofs ← (nó → pegarNúmeroGrausLiberdade());
3   se nó → está no contorno espacialmente fixo então
4     Definir posição atual do nó em função do valor inicial, recuperando geometria da
5     configuração inicial;
6     neighborNodes ← (node → obterNósVizinhos());
7     neighborNodes → Calcular novos valores (velocidade, pressão, aceleração) na
8     posição atualizada, conforme 6.2;
9   fim
10 fim

```

---

## 6.4 Exemplos de verificação

Esta seção ilustra a aplicação das técnicas propostas para a simulação de escoamentos com diversas condições de contorno especiais no contexto lagrangiano do PFEM, conforme descrito na seção 6.2. Nota-se que as funções de forma utilizadas para os elementos finitos da malha são de aproximação linear, essa escolha se deve à utilização da tesselação de Delaunay no remalhamento do PFEM.

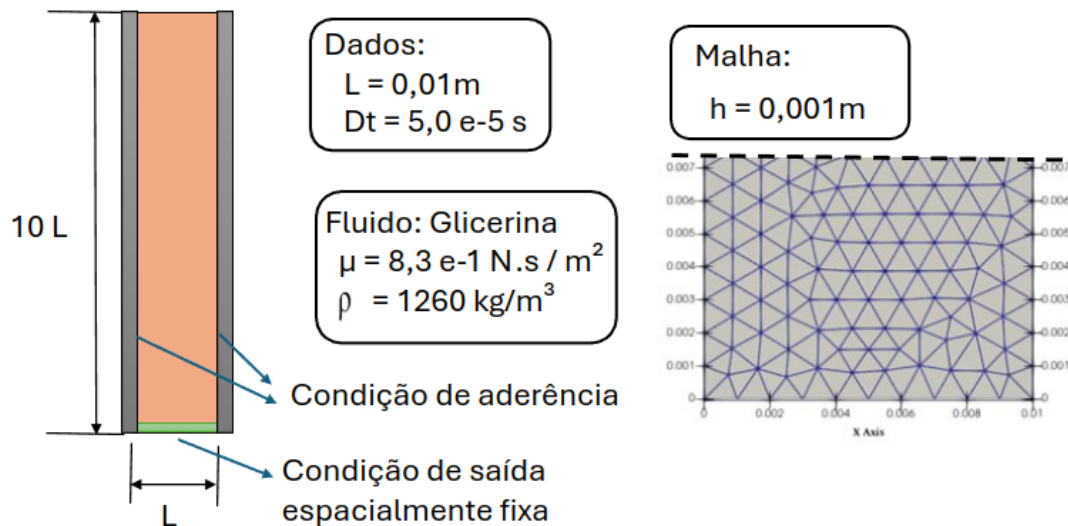
### 6.4.1 Escoamento em um tubo com superfície livre e contorno de saída

Este exemplo permite verificar a implementação das condições de saída em um contorno espacialmente fixo por meio da metodologia proposta neste trabalho.

O problema analisa o escoamento transiente de glicerina ( $\mu = 0,83 \text{ N.s/m}^2$ ,  $\rho =$

1260 kg/m<sup>3</sup>) em um tubo de largura  $L = 0,01$  m com superfície livre, utilizando uma malha de comprimento característico  $h = 0,001$  m ( $h/L = 0,1$ ) e passo de tempo  $\Delta t = 5,0 \times 10^{-5}$  s. As condições de contorno incluem: (i) aderência (não-deslizamento) nas paredes e (ii) saída espacialmente fixa para modelagem do contorno aberto fixo, conforme ilustra a Figura 26.

Figura 26 – Tubo com superfície livre: geometria, condições de contorno e dados do problema.



Fonte: Autoria Própria.

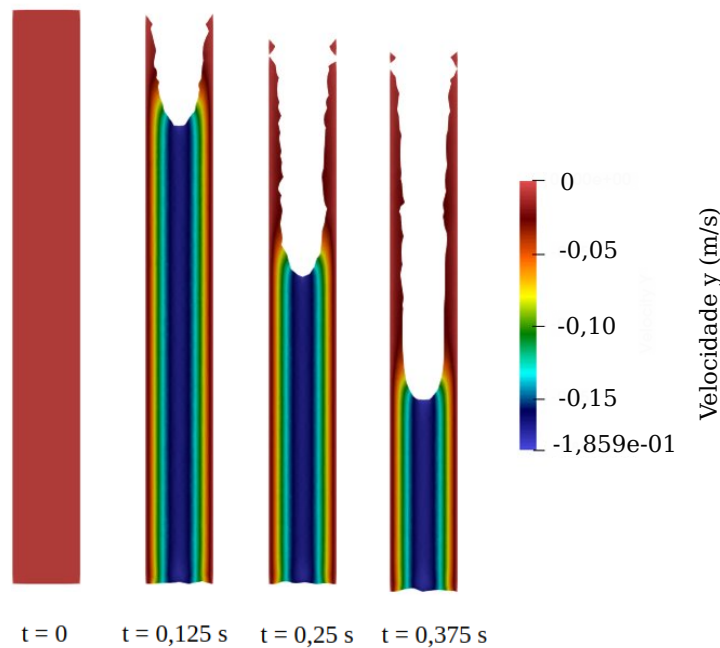
A Figura 27 apresenta o campo de velocidades na direção longitudinal  $v_y$  para alguns passos de tempo. Essa figura também permite identificar a mudança de configuração do fluido à medida que o escoamento vai passando pela fronteira de saída, onde nota-se respostas qualitativamente consistentes.

Esse exemplo também possui um perfil de velocidades analítico conhecido para a configuração estacionária, como pode ser visto em Çengel e Cimbala (2013). Nesse sentido, para o passo de tempo  $t = 0,375$  s apresenta-se a comparação do perfil de velocidades analítico com o numérico implementado (ver Figura 28).

## 6.4.2 Escoamento em um tubo com contornos de entrada e de saída

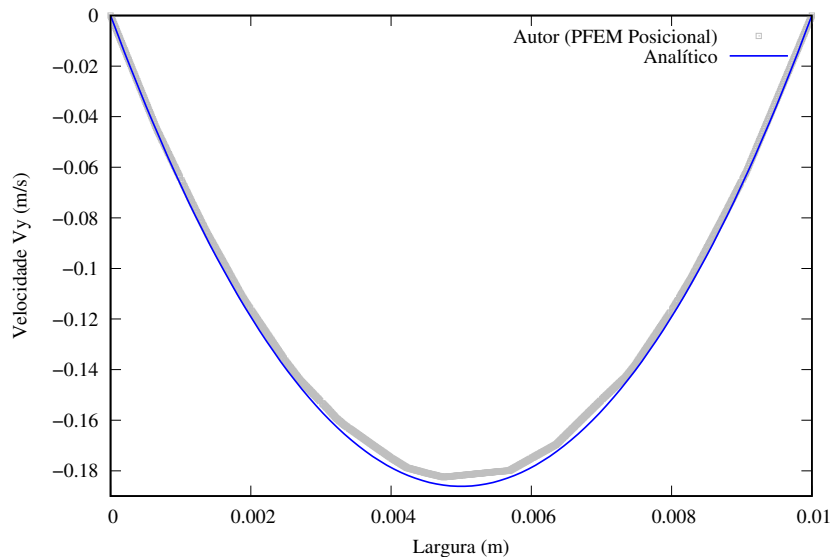
O presente exemplo visa verificar as implementações desenvolvidas para entrada e saída. O problema consiste em uma análise espacial de uma seção de controle de um tubo com escoamento gravitacional interno de glicerina. A seção de análise possui dimensões  $[L \times 6L]$ , sendo  $L = 0,01$  m, conforme apresentado no esquema da Figura 29. O escoamento é gerado pela ação da aceleração gravitacional, sendo considerado um fluxo contínuo, cujo objetivo é capturar o perfil de velocidades viscoso na configuração permanente. Na entrada aplica-se uma velocidade prescrita média de  $v_y = 0,12410241$  m/s, compatível com a condição de incompressibilidade do fluido, enquanto na saída as partículas são removidas, conforme metodologia da seção 6.2.1. Nesse sentido, é necessário considerar um comprimento de desenvolvimento do escoamento para

Figura 27 – Tubo com superfície livre: componente vertical de velocidade sobre a configuração deformada.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 28 – Tubo com superfície livre: perfil de velocidade.



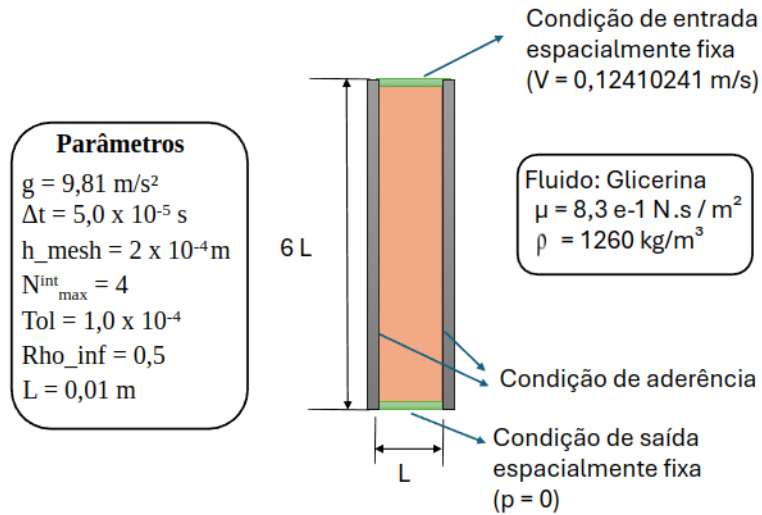
Fonte: Autoria Própria.

que o perfil de velocidades se torne representativo do problema viscoso. As paredes do tubo são consideradas aderentes e impermeáveis.

A glicerina é simulada com as propriedades físicas  $\mu = 0,83 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1260 \text{ kg m}^{-3}$ . Os demais parâmetros do problema incluem aceleração da gravidade  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  e para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho característico de  $0,0002 \text{ m}$  (ver malha na Figura 30). O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,00005 \text{ s}$ , o

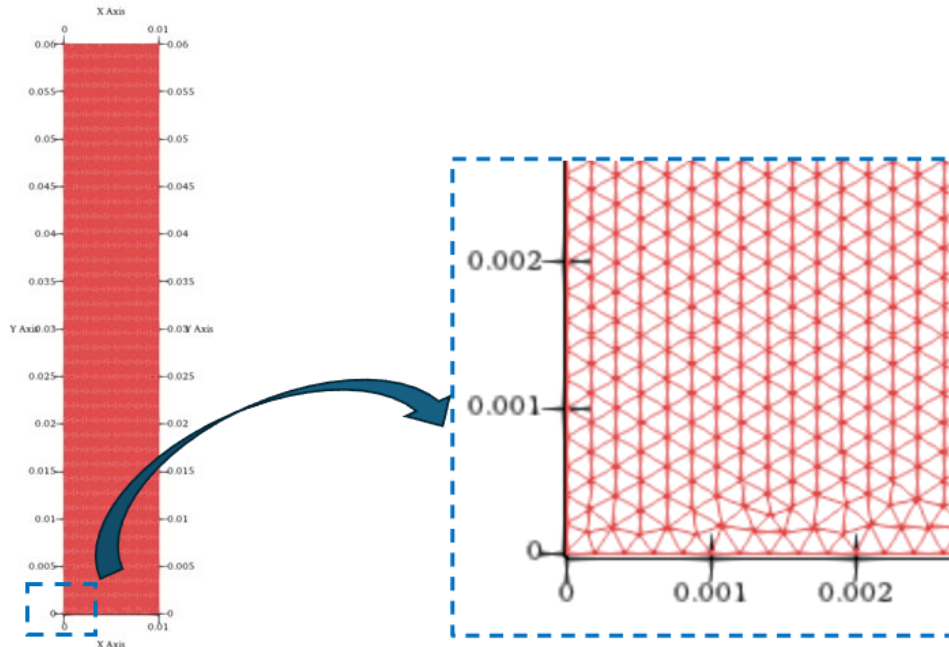
raio espectral é  $\rho_\infty = 0,5$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 4$  e a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-4}$ .

Figura 29 – Tubo com escoamento condições de entrada e saída: geometria e dados do problema.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 30 – Tubo com escoamento condições de entrada e saída: discretização inicial.

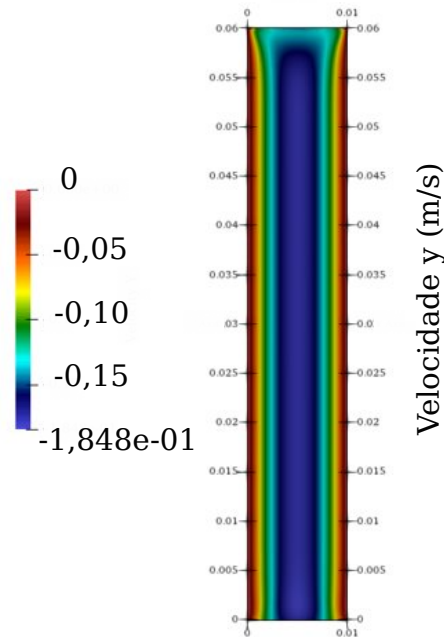


Fonte: Autoria Própria.

A Figura 31 apresenta a distribuição da componente vertical de velocidade  $v_y$  para a situação de escoamento permanente obtidas com 1 s de análise (20 mil passos de  $\Delta t = 0,00005 \text{ s}$ ). O valor máximo do perfil de velocidades permanente  $v_y = 1,848 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$  corresponde a 99% do valor analítico. Isso evidencia que a formulação proposta é capaz também de solucionar problemas que são classicamente abordados na descrição euleriana. Este exemplo também demonstra

a capacidade da malha de aproximação linear de capturar efeitos de ordem superior, com uma discretização adequada.

Figura 31 – Tubo com escoamento condições de entrada e saída: velocidade vertical no regime permanente.



Fonte: Autoria Própria.

### 6.4.3 Escoamento com paredes lisas e superfície livre

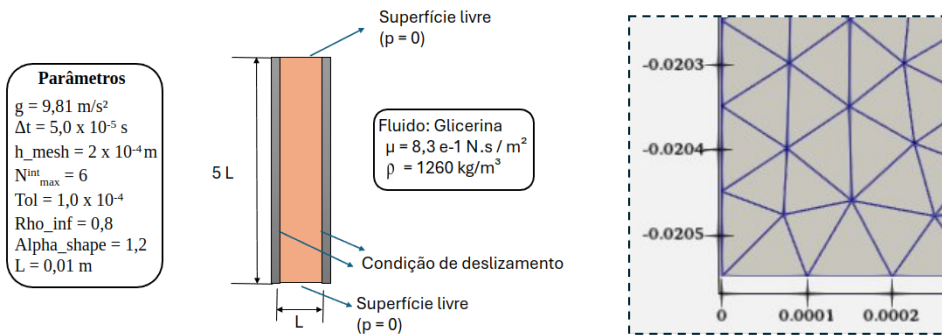
Este exemplo visa verificar o tratamento de paredes lisas proposto no contexto de um escoamento com superfície livre.

O problema consiste em uma análise do escoamento gravitacional interno de glicerina em um tubo longo e aberto com paredes lisas. A seção de análise possui dimensões  $[L \times 5L]$ , sendo  $L = 0,01$  m, conforme apresentado no esquema da Figura 32. O escoamento é gerado pela ação da aceleração gravitacional, sendo acompanhado o movimento desse conjunto de partículas de fluido no interior do tubo, a fim de verificar a aplicação das condições de deslizamento, conforme metodologia descrita em 6.2.3. Nas faces superior e inferior as condições são de força de superfície nula. As paredes do tubo são consideradas lisas e impermeáveis.

A glicerina é simulada com as propriedades físicas  $\mu = 0,83 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1260 \text{ kg m}^{-3}$ . Os demais parâmetros do problema incluem aceleração da gravidade  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  e para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho característico de  $0,0002$  m (ver malha na Figura 32). O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,00005$  s, o

raio espectral é  $\rho_\infty = 0,8$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 6$  e a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-4}$ .

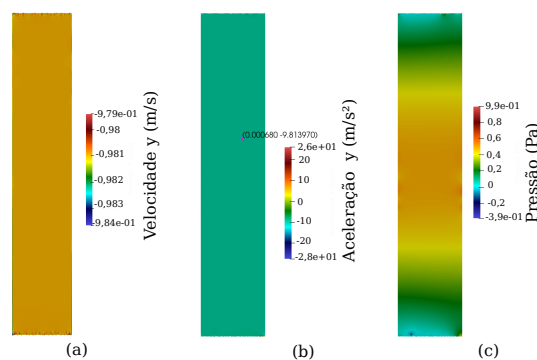
Figura 32 – Paredes lisas e superfície livre: modelo, propriedades e malha.



Fonte: Autoria Própria.

A Figura 33 ilustra os campos de velocidade, aceleração e pressão que caracterizam a solução obtida. A Figura (a) ilustra a distribuição de velocidades na direção longitudinal  $v_y$  para o passo de tempo  $t = 0,10 \text{ s}$ . A Figura (b) ilustra o campo de aceleração na direção longitudinal  $a_y$  para o passo de tempo  $t = 0,075 \text{ s}$ . A Figura (c) ilustra o campo de pressão  $p$  para o passo de tempo  $t = 0,075 \text{ s}$ . Os campos apresentam os valores esperados para a solução analítica deste problema, destaca-se ainda a suavidade espacial dos campos e a estabilidade temporal.

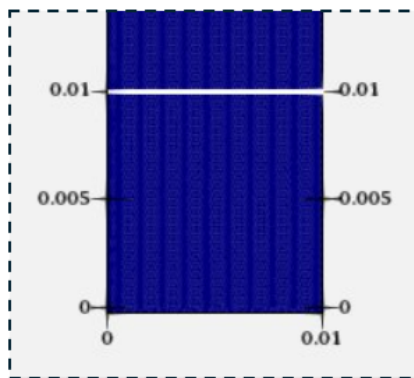
Figura 33 – Campos de velocidade, aceleração e pressão em um escoamento com parede lisa fixa.



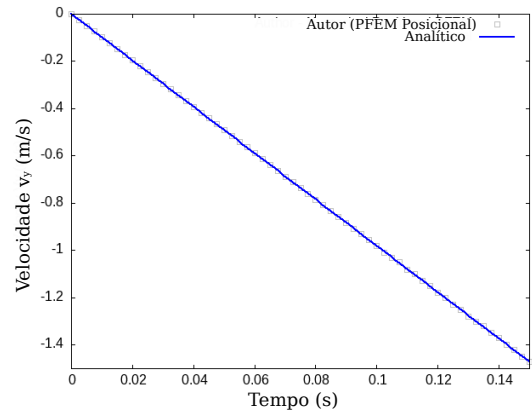
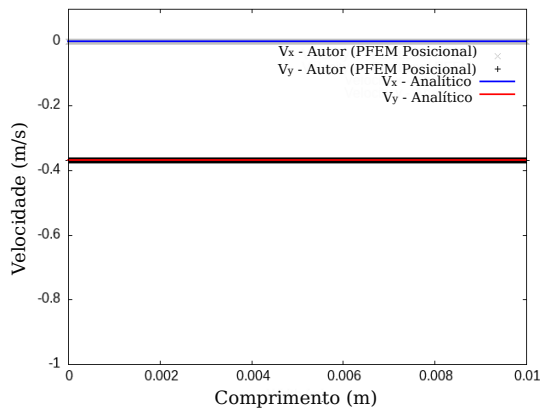
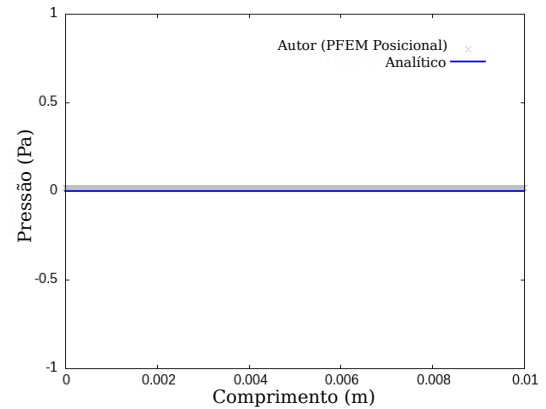
Fonte: Autoria Própria.

Por fim, a Figura 34 apresenta algumas comparações gráficas com resultados analíticos para este problema. A Figura 34a apresenta a seção transversal de análise, a Figura 34b apresenta a comparação da velocidade na direção longitudinal  $v_y$  ao longo do tempo com o analítico, a Figura 34c ilustra a comparação dos perfis de velocidades constantes com os analíticos esperados, e a Figura 34d apresenta a comparação do perfil de pressão com o analítico.

Figura 34 – Análise numérica da implementação em relação a previsões analíticas.



(a) Seção transversal de análise: escoamento de superfície livre com paredes lisas.

(b) Velocidade longitudinal  $v_y$  ao longo do tempo.(c) Perfis de velocidades  $v_x$  e  $v_y$  para o caso de paredes lisas.

(d) Perfil de pressão.

Fonte: Autoria Própria.

#### 6.4.4 Escoamento de Couette

Este exemplo trata do escoamento entre placas planas com movimento relativo, também denominado de escoamento de Couette. Na parede da esquerda considera-se entrada espacialmente fixa com condição de Neumann, enquanto na parede da direita, considera-se condição de saída espacialmente fixa. Na face superior aplica-se a componente horizontal de velocidade constante e unitária, enquanto na face inferior aplica-se a condição de aderência com velocidade nula. Materialmente, o problema consiste em uma análise do escoamento horizontal de Couette, onde aplicando apenas as condições de contorno já se consegue realizar a análise do fenômeno, sem a necessidade de aplicar forças de domínio.

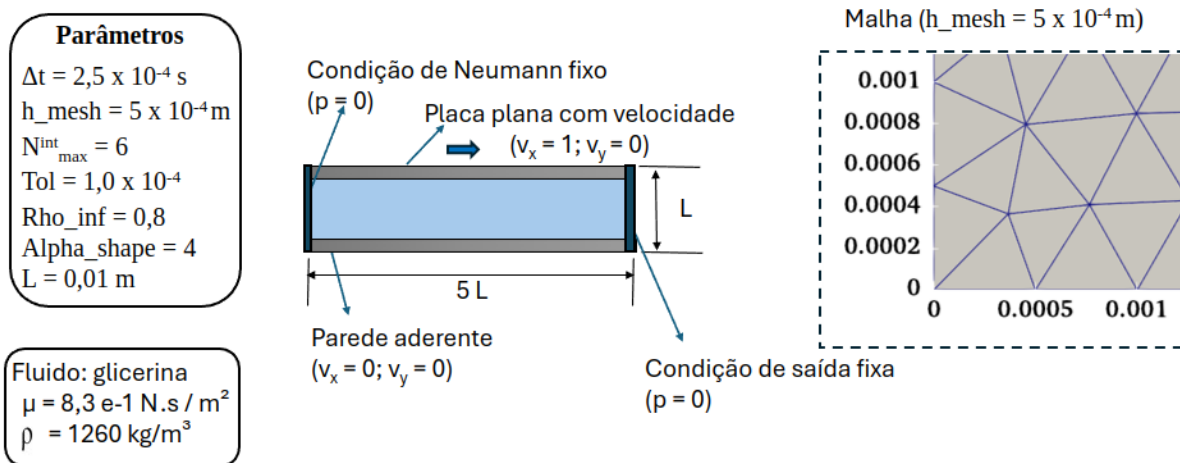
##### Caso bidimensional

A seção de análise do problema bidimensional possui dimensões  $[5L \times L]$ , sendo  $L = 0,01$  m, conforme apresentado no esquema da Figura 35. Nas faces superior e inferior as condições

são de aderência com velocidade relativa de  $v_x = 1,0$  m/s. A parede esquerda possui contorno fixo com força de superfície nula, enquanto na saída aplica-se a condição de saída espacialmente fixa.

A glicerina é simulada com as propriedades físicas  $\mu = 0,83$  N s m<sup>-2</sup> e  $\rho = 1260$  kg m<sup>-3</sup>. Para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho característico de 0,0005 m (ver malha na Figura 35). O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,00025$  s, o raio espectral é  $\rho_\infty = 0,8$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 6$  e a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-4}$ .

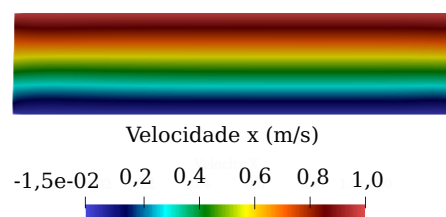
Figura 35 – escoamento de Couette: geometria, condições de contorno e malha.



Fonte: Autoria Própria.

A Figura 36 apresenta a distribuição da componente horizontal de velocidades  $v_x$  para o regime estacionário  $t = 0,15$  s.

Figura 36 – Escoamento de Couette: componente horizontal de velocidade  $v_x$ .

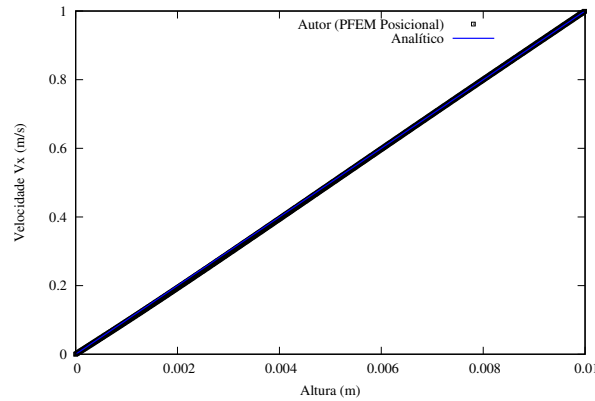


Fonte: Autoria Própria.

Analisando o perfil de velocidades na direção horizontal  $v_x$  sobre a seção transversal em  $x = 0,045$  m, nota-se boa correspondência com o resultado analítico obtido por Couette, conforme apresentado na Figura 37. O tempo de processamento até  $t = 0,15$  s foi de 12,47 minutos, utilizando 7 processadores e com uso de memória RAM de 44,4 Mb por processador. A Tabela 1 apresenta a distribuição do tempo de processamento para o último passo de tempo. Nota-se que, apesar do uso do remalhamento para permitir distorções indefinidas mesmo com

uma formulação lagrangiana, as maiores parcelas de tempo permanecem sendo referentes à montagem do sistema e ao processo de solução do sistema.

Figura 37 – Escoamento de Couette: comparação do perfil de velocidades numérico  $v_x$  com a solução analítica.



Fonte: Autoria Própria.

Tabela 1 – Escoamento de Couette: distribuição temporal dos processos de simulação

Processo	Tempo (s)	Proporção (%)
Remalhamento	0,051936	5,52
Montagem do sistema linear	0,593721	63,12
Solução do sistema linear	0,294936	31,36
Total	0,940593	100,00

Fonte: Autoria Própria.

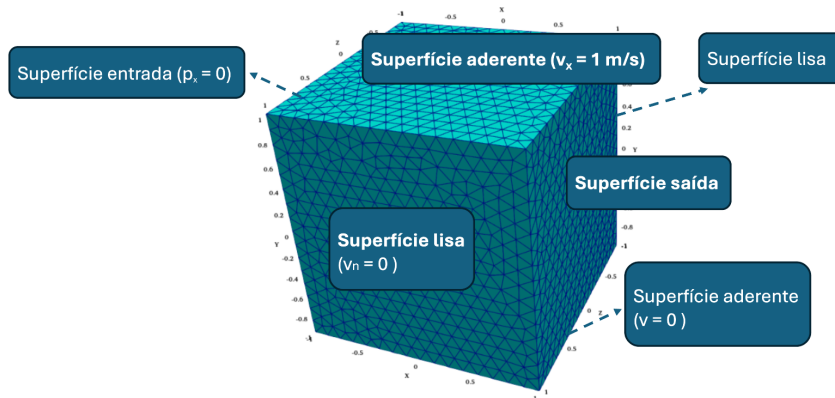
### Caso tridimensional

Este problema é semelhante ao anterior, contudo realiza-se a simulação do problema de escoamento de Couette em três dimensões, onde a geometria de análise possui dimensões  $[2L \times 2L \times 2L]$ , sendo  $L = 1$  m, conforme apresentado no esquema da Figura 38. As condições de contorno são as mesmas do caso bidimensional, mas agora com a generalização para o caso 3D. A face de entrada da esquerda transforma-se em uma superfície de entrada, enquanto a face de saída da direita transforma-se em uma superfície de saída. As superfícies superior e inferior possuem velocidade relativa de  $v_x = 1,0$  m/s e as últimas 2 faces laterais possuem condição de paredes lisas, para imposição da condição de simetria.

Utiliza-se um fluido genérico com as propriedades físicas  $\mu = 0,2 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ . Para a malha utilizam-se elementos finitos tetraédricos de aproximação linear com tamanho característico de  $0,0625$  m (ver malha na Figura 39). O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,02$  s, o raio espectral é  $\rho_\infty = 0$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 20$  e a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-5}$ .

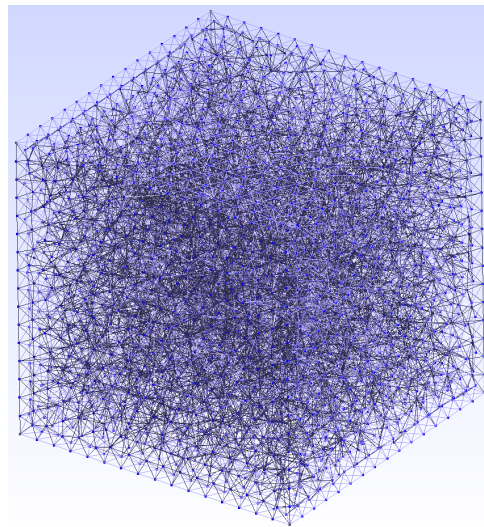
A Figura 40 apresenta a componente horizontal de velocidade  $v_x$  para o escoamento desenvolvido em um tempo de  $t = 80$  s. Observa-se qualitativamente bons resultados, notando-se

Figura 38 – Escoamento de Couette 3D: geometria e condições de contorno.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 39 – Escoamento de Couette 3D: malha de elementos tetraédricos de aproximação linear.



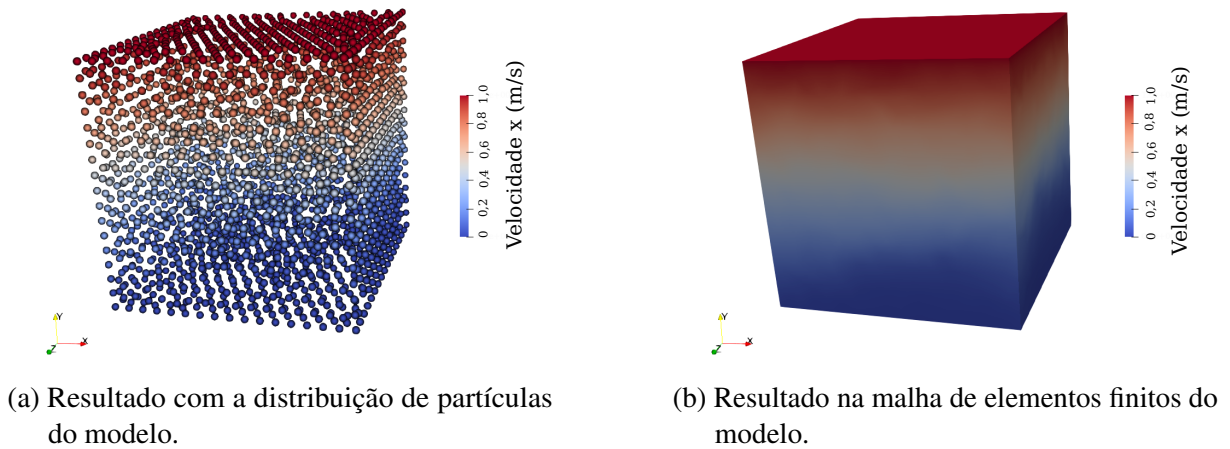
Fonte: Autoria Própria.

o gradiente de velocidades partindo de zero na parede inferior e atingindo o valor máximo na parede superior.

### 6.4.5 Cavidade quadrada

O problema de uma cavidade quadrada com velocidade tangencial no contorno superior é tipicamente utilizado na literatura para verificação de formulações eulerianas para escoamentos incompressíveis. Como ilustra a Figura 41 este exemplo trata-se de uma cavidade com paredes aderentes, cuja tampa superior move-se com velocidade horizontal constante, gerando um gradiente de velocidades interno, onde o campo de velocidades no regime estacionário é bem conhecido dos resultados apresentados na literatura, servindo dessa forma para verificação das implementações relativas para tratar de domínios espacialmente fixos com o PFEM.

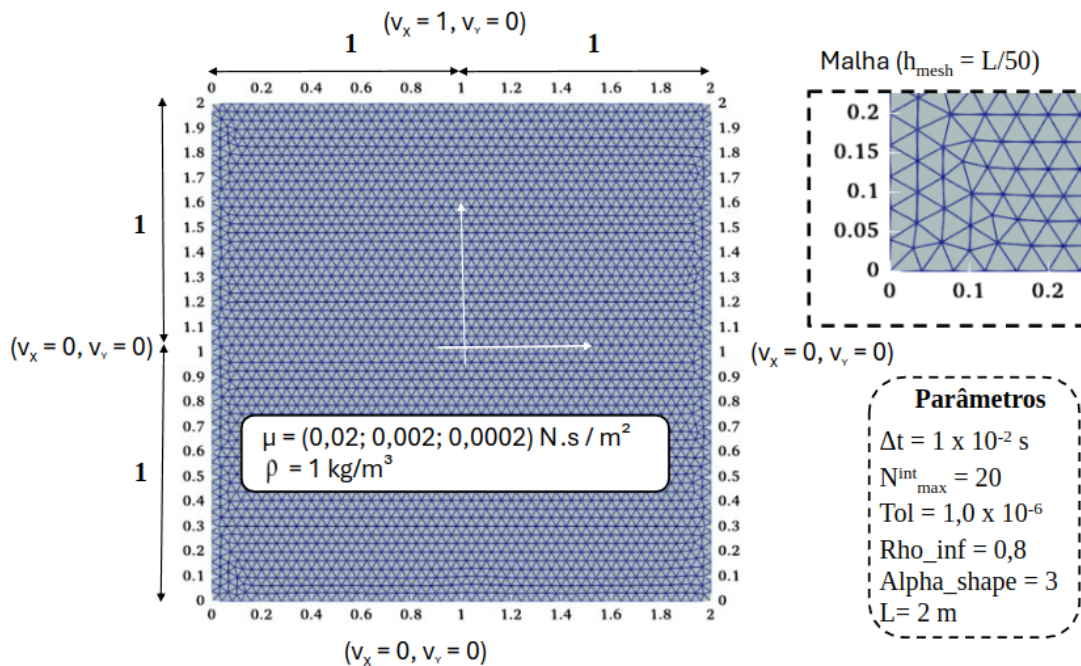
Este problema possui geometria com dimensões  $[2L \times 2L]$ , sendo  $L = 1$  m, conforme

Figura 40 – Escoamento de Couette 3D: componente horizontal de velocidade  $v_x$ .

Fonte: Autoria Própria.

apresentado no esquema da Figura 41. A face superior possui velocidade de  $v_x = 1,0$  m/s, enquanto as demais paredes possuem condição de contorno de aderência com velocidade nula. Utiliza-se um fluido genérico com  $\rho = 1$  kg m<sup>-3</sup> e viscosidade dinâmica variando em função do número de Reynolds (Re) desejado. Para o número de Reynolds Re 100, 1000 e 10000, as viscosidades dinâmicas são de  $\mu = 0,02$  N s m<sup>-2</sup>,  $\mu = 0,002$  N s m<sup>-2</sup> e de  $\mu = 0,0002$  N s m<sup>-2</sup>, respectivamente. Nota-se que o comprimento característico do escoamento é de  $2L = 2$  m.

Figura 41 – Cavidade quadrada: geometria, condições de contorno e propriedades.

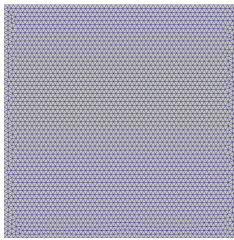


Fonte: Autoria Própria.

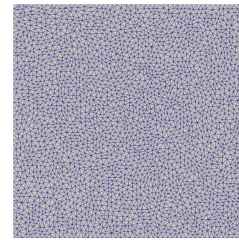
Para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho característico de 0,02 m (ver malha na Figura 39). O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,01$  s, o raio espectral é  $\rho_{\infty} = 0,8$ , o número máximo de iterações do método de Newton-

Raphson é  $N_{max}^{it} = 20$  e a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-6}$ . A Figura 42 ilustra também a mudança de configuração entre a malha inicial e final, resultante do processo de remalhamento do PFEM a cada passo de tempo. Essa reconstrução de malha é necessária neste exemplo a fim de permitir distorções indefinidas mesmo com uma formulação lagrangiana, permitindo assim a simulação da formação de vórtices como os que ocorrem no problema da cavidade quadrada.

Figura 42 – Cavidade quadrada: análise do remalhamento no PFEM.



(a) Cavidade quadrada: malha inicial.



(b) Cavidade quadrada: malha na configuração estacionária do escoamento.

Fonte: Autoria Própria.

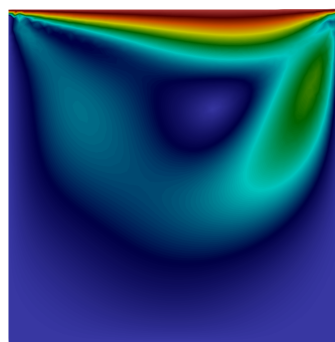
Na Figura 43 compara-se a distribuição do valor absoluto de velocidade no regime permanente, para os diferentes números de Reynolds, com os resultados obtidos por Yokomizo (2024) por meio de uma abordagem euleriana do MEF empregando-se o método VMS (formulação variacional multiescala) e o modelo de turbulência LES (*Large Eddy Simulation*), permitindo a captura de escalas menores de vorticidade mesmo com malhas mais grosseiras. Nota-se boa concordância para os valores de  $Re$  100 e  $Re$  1000, enquanto para  $Re$  10000 observam-se algumas diferenças, que podem ser atribuídas às diferentes discretizações, ao modelo de turbulência adotado pela referência, além das diferenças nos métodos.

Os resultados de Ghia *et al.* (1982) para a cavidade quadrada com fluido viscoso são frequentemente utilizados para verificação de códigos numéricos. A Figura 44 apresenta a comparação dos resultados numéricos obtidos com o PFEM lagrangiano com os resultados numéricos de Ghia *et al.* (1982) para o caso de  $Re = 100$ , apresentando boa concordância geral.

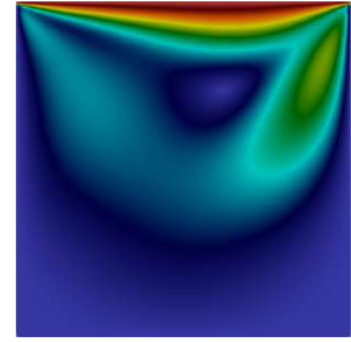
#### 6.4.6 Escoamento sobre cilindro com desprendimento de vórtices

Este é outro exemplo tradicionalmente utilizado para verificação de códigos implementados em descrição euleriana, tendo sido empregado também por Fernandes (2020) e Yokomizo (2024). Trata-se de um cilindro submetido a um escoamento incompressível tal que uma esteira de vórtices de von Kármán é formada. No contexto do PFEM, além dos desafios de se representar contornos espacialmente fixos de entrada e saída, a esteira de vórtices é um desafio que coloca à prova a técnica de reconstrução e controle de qualidade da malha.

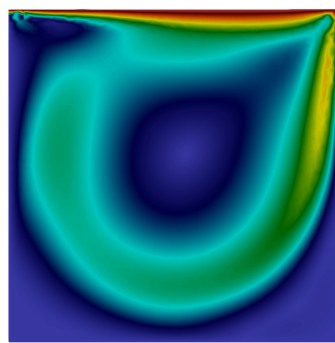
Figura 43 – Cavity quadrada: campo de velocidades.



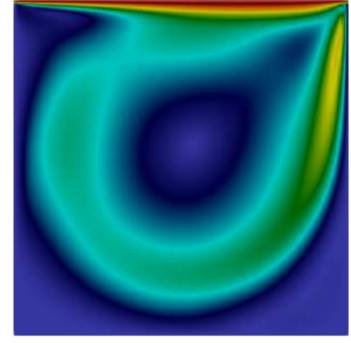
(a) Re 100 (PFEM)



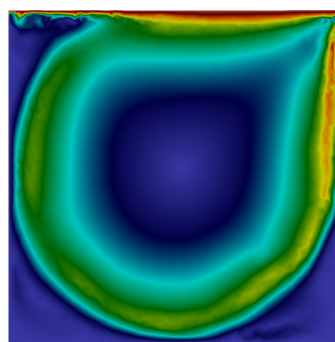
(b) Re 100 (FEM (Yokomizo, 2024))



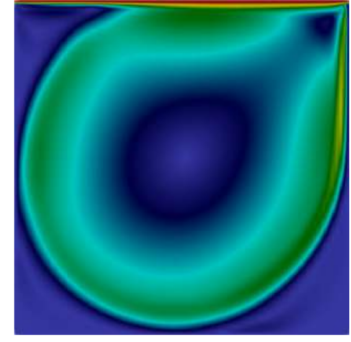
(c) Re 1000 (PFEM)



(d) Re 1000 (FEM (Yokomizo, 2024))



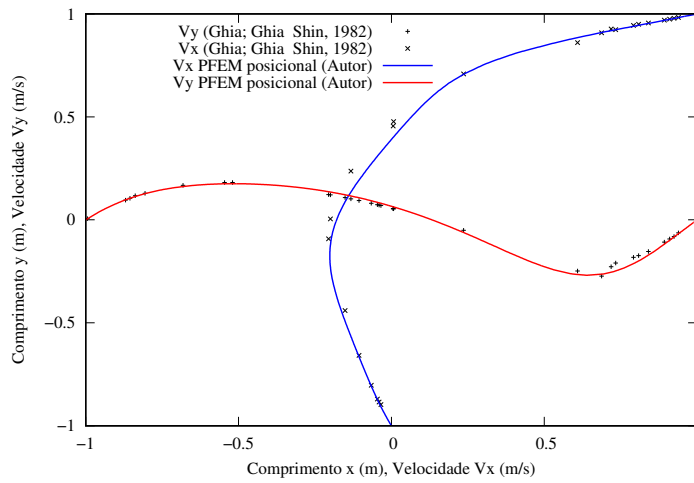
(e) Re 10000 (PFEM)



(f) Re 10000 (FEM (Yokomizo, 2024))

Fonte: Autoria Própria.

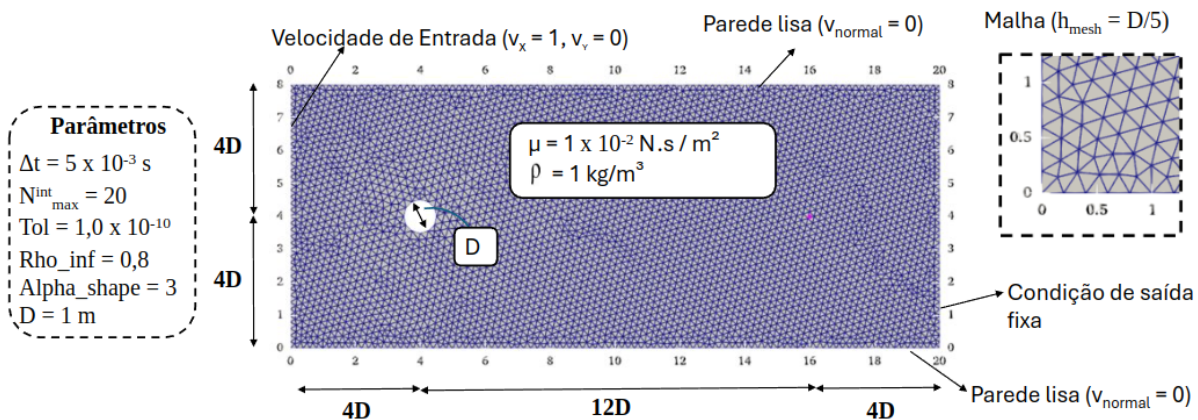
Este problema possui geometria com dimensões  $[20D \times 8L]$ , sendo  $D = 1$  m, conforme apresentado no esquema da Figura 45. Trata-se de um escoamento horizontal, portanto a gravidade não afeta a análise neste contexto. A parede esquerda representa um contorno de entrada e possui velocidade de  $v_x = 1,0$  m/s, a parede da direita possui condição de saída; as paredes superior e inferior representam limites de simetria, sendo representados com paredes lisas e impermeáveis. Utiliza-se um fluido genérico com  $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$  e viscosidade dinâmica de

Figura 44 – Cavidade quadrada: comparação com resultados de Ghia *et al.* (1982).

Fonte: Autoria Própria.

$$\mu = 0,01 \text{ N s m}^{-2}.$$

Figura 45 – escoamento ao redor de um cilindro: geometria, condições de contorno e malha.



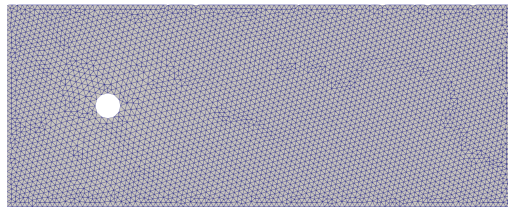
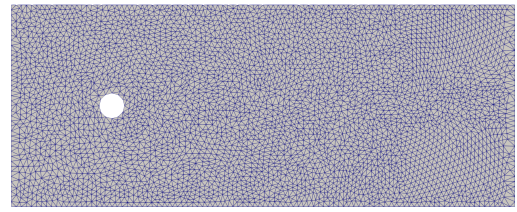
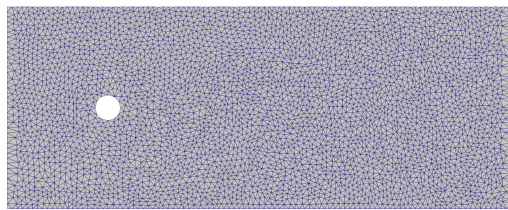
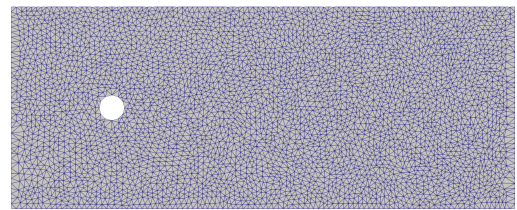
Fonte: Autoria Própria.

Para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho característico de 0,2 m (ver malha na Figura 46a). O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,005 \text{ s}$ , o raio espectral é  $\rho_\infty = 0,8$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 20$  e a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-10}$ . A Figura 46 mostra a malha de elementos finitos em diferentes instantes, onde nota-se qualitativamente a eficiência da estratégia de realocação de partículas associada ao remalhamento para manter uma discretização coerente ao longo da solução.

A distribuição de velocidade (valores absolutos) é apresentada para diferentes instantes na Figura 47, onde é possível observar tanto o início do desprendimentos dos vórtices como a esteira completamente desenvolvida.

A componente vertical da velocidade  $v_y$  no ponto A de coordenadas (15m; 8m) é monitorada ao longo do tempo e comparada na Figura 48 com o resultado de Sampaio *et al.* (1993). Cabe

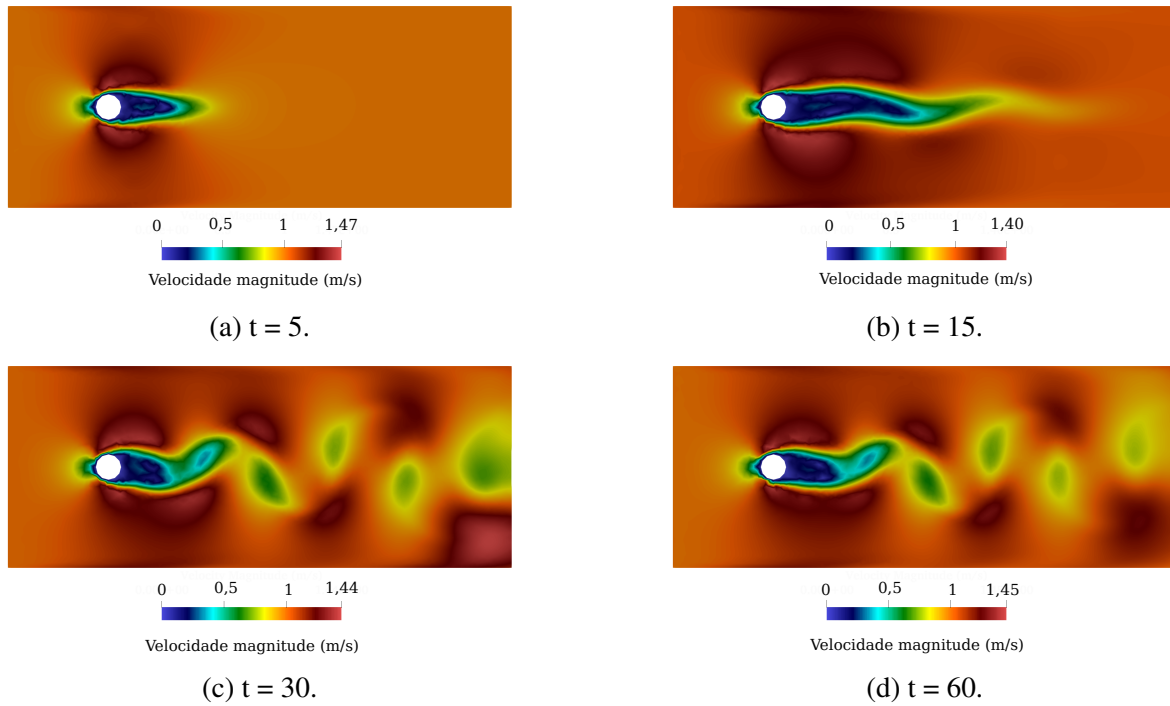
Figura 46 – Escoamento ao redor de um cilindro: desenvolvimento do remalhamento.

(a)  $t = 0$ .(b)  $t = 15$ .(c)  $t = 30$ .(d)  $t = 60$ .

Fonte: Autoria Própria.

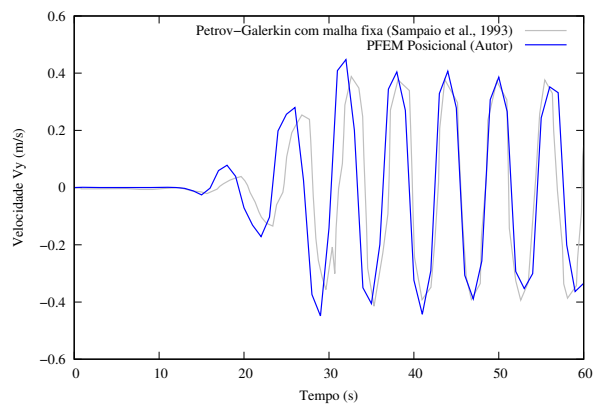
destacar que, tratando-se de um problema de estabilidade, o período do início do desprendimento de vórtices até que seja atingida a amplitude de longo termo, pode apresentar comportamentos bastante diferentes a depender da malha, dos passo de tempo e da técnica numérica adotada. Destaca-se que, na solução de longo termo, nota-se correspondência muito boa da solução do presente trabalho com a referência, tanto em amplitude quanto em frequência.

Figura 47 – Escoamento ao redor de um cilindro: campo da norma da velocidade  $\|\mathbf{v}\|$ .



Fonte: Autoria Própria.

Figura 48 – Análise da componente vertical de velocidade  $v_y$  no ponto (15m, 8m).



Fonte: Autoria Própria.

## Capítulo 7

# Escoamentos multifásicos com mudanças topológicas

Como visto na seção 1.1.2.2, o conceito de fase é estabelecido para uma região distinta de matéria cuja propriedades são as mesmas (ver também (Russell, 1994)). Nesse sentido, um escoamento multifásico é definido pela presença de duas ou mais fases, como ocorre nos sistemas constituídos por gelo e água líquida; ou óleo e água.

Neste trabalho, são considerados apenas fluidos imiscíveis, ou seja, quando fluidos de diferentes características, que ao entrarem em repouso, separam-se em camadas bem definidas devido à incompatibilidade de forças intermoleculares e à polaridade dos fluidos. Nesse sentido, a mistura de tais fluidos resulta em escoamentos multifásicos, podendo ocorrer múltiplas interfaces fluido-fluido (ver seção 1.1.2.2 para mais detalhes).

A análise numérica de escoamentos multifásicos possui inúmeras aplicações tanto na Engenharia quanto no estudo científico de fenômenos da natureza. A simulação desses problemas pode permitir, por exemplo, um melhor dimensionamento da extração e refino do petróleo, onde há a presença concomitante de água, óleos e gases, bem como melhor projeto de oleodutos e gasodutos nos quais também pode ocorrer o transporte de mais de um fluido, configurando um escoamento bifásico ou multifásico. A simulação de escoamentos multifásicos também encontra aplicação na indústria de alimentos, onde ocorrem complexas interações entre água, óleos e gases. A modelagem de fluidos bifásicos ainda encontra aplicações na análise da dinâmica de interação de ventos com ondas do mar. Outras aplicações ainda podem ser encontradas, como no fenômeno da decantação, com aplicações na separação dos compostos do sangue na medicina e na injeção e dispersão de medicamentos fluidos nos vasos sanguíneos.

O PFEM apresenta características que o tornam interessante para a aplicação às análises de escoamentos multifásicos, sendo sua capacidade de tratar problemas com mudanças topológicas a principal delas. No presente trabalho são propostas adaptações no processo tradicional do PFEM (triangulação de Delaunay seguida do método  $\alpha$ -shape e de técnica de realocação de

partículas) de modo a permitir a simulação de escoamentos multifásicos.

Tal como na formulação tradicional, inicia-se com a definição de uma malha de elementos finitos que ocupe todos os volumes de fluido na condição inicial. Os diferentes fluidos que compõem o problema são identificados através da atribuição das características físicas, a saber, no caso de escoamentos newtonianos incompressíveis, viscosidade e densidade. As propriedades são definidas e aplicadas às geometrias iniciais, sendo atribuída as mesmas propriedades às partículas que constituem o domínio. Nesse sentido, as interfaces fluido-fluido são formadas por elementos que possuem partículas de diferentes materiais. Assim, ao longo da análise do escoamento podem surgir múltiplas interfaces e elas são capturadas por meio da identificação dos elementos finitos formados por partículas de propriedades distintas.

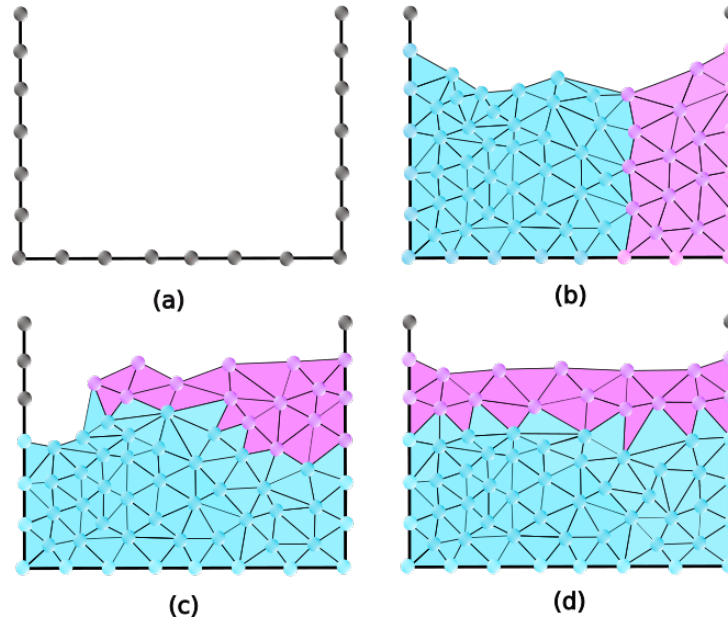
Estratégias diferentes devem ser adotadas ao lidar com as partículas fantasmas que definem as paredes rígidas ou flexíveis, e ao realizar a realocação de partículas para o controle da qualidade da malha. Principalmente, ao atribuir as características físicas para essas partículas fantasmas alocadas sobre as paredes, uma vez que essas partículas podem contribuir com diferentes fluidos ao longo da análise. Quanto à realocação de partículas, essas devem ser posicionadas nos elementos que pertençam ao mesmo tipo de fluido de onde elas foram removidas.

## 7.1 Atribuição das propriedades físicas às partículas fantasmas

O programa deve ser capaz de identificar o tipo de fluido que mais se aproxima da parede ou do sólido deformável, a fim de promover a correta atribuição de propriedades físicas às partículas fantasmas. Para alcançar esse objetivo duas abordagens foram implementadas: 1. detectar no domínio de análise o tipo de material da partícula de fluido mais próxima do ponto fantasma; ou 2. aguardar ocorrer a conexão da partícula fantasma com o domínio de fluidos pela tesselação de Delaunay e atribuir o material do nó mais próximo conectado ao ponto fantasma, fazendo a busca apenas entre os elementos conectados a essa partícula. Devido a mesma eficácia e menor custo computacional, a segunda abordagem foi selecionada para ser aplicada aos demais estudos deste trabalho.

A Figura 49 (a) denota a inicialização das partículas fantasmas nas paredes do domínio sem um material definido. A partir da definição do domínio e geração da primeira malha, algumas partículas fantasmas têm os seus materiais definidos para esse passo de tempo, conforme a Figura (b). As Figuras (c) e (d) ilustram a atribuição dinâmica dos materiais às partículas fantasmas das paredes, assim ao longo da análise a mesma partícula fantasmas pode ter mais de um material atribuído, em função do fluido mais próximo. Essa abordagem é fundamental quando se trabalha com escoamentos multifásicos, haja vista que o contato fluido-parede pode ocorrer com diferentes fluidos ao longo do tempo.

Figura 49 – Partículas fantasmas em escoamentos multifásicos: atribuição dinâmica das características do fluido.

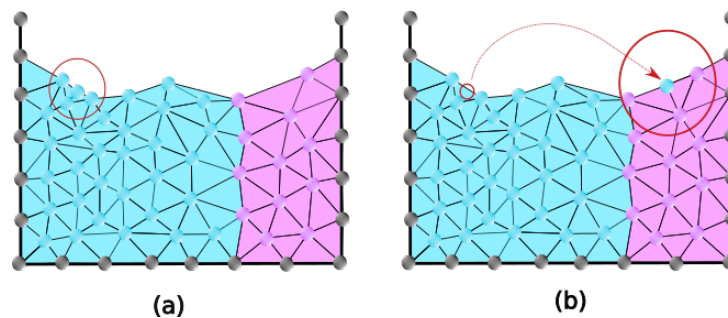


Fonte: Autoria Própria.

## 7.2 Realocação de partículas em escoamentos multifásicos

Diferentemente dos problemas com apenas um fluido, ao se trabalhar com escoamentos multifásicos, durante o processo de controle de qualidade da malha, deve-se ter o cuidado para que partículas de um fluido A não sejam realocadas no domínio de um fluido B ou C. A Figura 50 ilustra o que pode ocorrer durante o processo de remalhamento tradicional do PFEM: uma partícula muito próxima de outras é identificada para remoção (ver Figura 50 (a)) e tem a sua posição alterada para o centro da maior aresta da malha (ver Figura 50 (b)). O problema está no fato da nova posição ser em um domínio diferente do inicial, assim ocorre o transporte indevido de matéria entre regiões com diferentes características.

Figura 50 – Remalhamento tradicional do PFEM aplicado a escoamentos multifásicos: realocação de partículas imprópria.

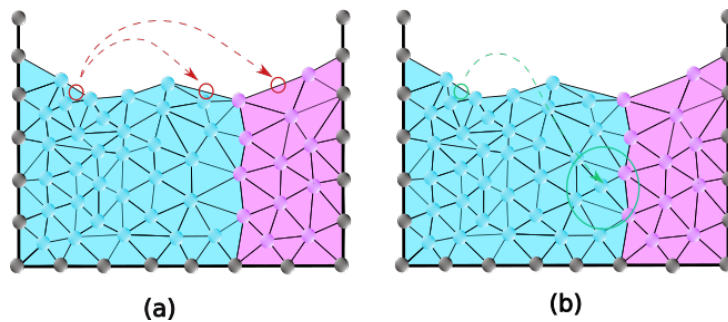


Fonte: Autoria Própria.

Assim, o controle de qualidade da malha no caso multifásico é aplicado individualmente

para cada domínio de fluido, e não mais de forma global. Isso permite manter certa uniformidade de malha e uma boa regularidade na distribuição de partículas no domínio de cada fluido. O processo de realocação de partículas setorizado por fluido é ilustrado na Figura 51. Como pode ser observado nessa figura, a realocação de partículas agora ocorre para o centro da maior aresta do mesmo domínio de fluido, desde que essa nova posição não resulte em partículas muito próximas, tendo em vista as demais partículas vizinhas a essa aresta, que podem pertencer a outro domínio (outro tipo de fluido).

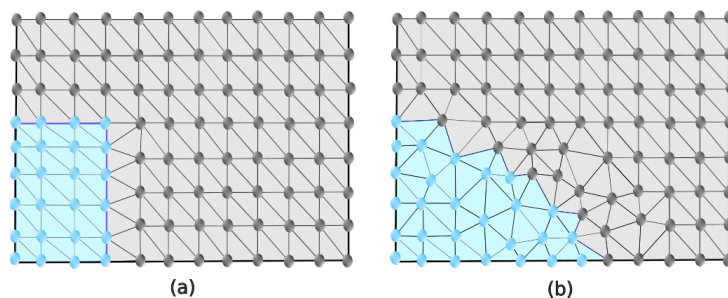
Figura 51 – Técnica de remalhamento para escoamentos multifásicos com PFEM.



Fonte: Autoria Própria.

Dispondo-se de um modelo bifásico, ou multifásico, os problemas de escoamentos de líquidos com superfície livre podem ser simulados considerando-se o sistema ar-líquido. Desse modo, além de se obter uma simulação mais realista, torna-se dispensável a delimitação da superfície livre por um critério geométrico (ver Figura 52), uma vez que a definição da superfície livre é dada simplesmente pela solução do campo de posições do problema multifásico acoplado, eliminando-se a necessidade de utilização de parâmetros geométricos arbitrários para controlar a definição da superfície livre, levando a um modelo mais consistente tanto fisicamente como em termos da descrição matemática.

Figura 52 – Escoamentos de superfície livre pelo PFEM sem utilizar o  $\alpha$ -shape.



Fonte: Autoria Própria.

### 7.3 Implementação computacional

Esta seção detalha os principais aspectos do tratamento computacional de escoamentos multifásicos pelo PFEM. A abordagem proposta é original e independente, na forma apresentada

para o multifásico. O pseudocódigo do algoritmo 7 apresenta a estrutura geral do remalhamento no contexto de escoamentos multifásicos. Em cada passo de tempo esse algoritmo é acionado e realiza-se uma análise da qualidade dos elementos da malha, marcando os elementos críticos, ou seja, aqueles que possuem partículas relativamente próximas ou com volumes pequenos. No contexto de múltiplos materiais, tais elementos críticos podem fazer parte da interface fluido-fluido, não sendo viável a sua simples remoção. Nesse sentido, o algoritmo realiza uma busca na vizinhança do elemento crítico a fim de realocar a partícula crítica ao longo da interface fluido-fluido e na região de mesmo material. Destaca-se que em casos extremos, podem ocorrer elementos denominados supercríticos, ou seja, aqueles que possuem partículas muito próximas e com volumes extremamente pequenos, em que se torna inviável a simples realocação, resultando em uma malha com grande potencial de inversão de elementos, consequentemente, inutilizando a solução. Nesses casos, a partícula supercrítica é removida, desde que não seja de bolha, podendo ocorrer uma quebra localizada das equações governantes, a qual é contornada com o refinamento da malha. Pois, com o aumento do número de elementos, a região de interface fluido-fluido é mais suavizada e efeitos de realocação de partículas são minimizados, resultando em uma solução mais consistente. Nota-se ainda que com o refinamento temporal, a ocorrência de elementos críticos é minimizada, consequentemente, a realocação de partículas é menos frequente e a qualidade da solução é melhorada.

Nota-se que a estrutura do algoritmo 7 é formada por duas etapas: a primeira remove nós críticos da malha de elementos finitos, processando cada fluido por vez e mapeando a quantidade removida por material (ver Blocos I, II e III); a segunda etapa consiste na geração de novos nós em cada domínio de fluido, seguindo a mesma quantidade removida. Nota-se que esse processo caracteriza um refinamento adaptativo, onde o objetivo é manter cada domínio de fluido com uma malha o mais uniforme possível, em termos dos tamanhos dos elementos finitos.

---

**Algoritmo 7:** Refinamento adaptativo no multifásico

---

```

1  Remover nós da malha e contabilizar por material, conforme seção 7.2;
2  início
3  | Procurar por elementos críticos;;
4  | início
5  | | Bloco I: elemento próximo à parede e não tem todos os nós rígidos, conforme
6  | | | algoritmo 8;
7  | | | Bloco II: elemento com aresta curta conectada à parede, conforme algoritmo 9;
8  | | | Bloco III: volume pequeno, conforme algoritmo 10;
9  | fim
10 fim
10 Gerar novos nós para cada material, conforme seção 7.2 e algoritmo 12;
```

---

O pseudocódigo do algoritmo 8 desenvolve o Bloco I do algoritmo geral 7. Na procura por elemento crítico da malha, o Bloco I trata os elementos críticos caracterizados por estarem próximos à parede e não terem todos os nós rígidos, ou seja, pelo menos um nó é interno ou de

superfície livre. Nesse conjunto de elementos, o algoritmo calcula a distância até a parede, o volume do elemento e determina uma altura média para o elemento. A partícula é removida caso a altura média seja menor que 50% do comprimento médio do elemento conectado à parede. Caso algum nó do elemento seja da interface fluido-fluido ou de superfície livre, é aplicado um fator de segurança que torna mais rígido o critério de remoção de nós, ou seja, a partícula só é removida se a altura média for menor que 12,5% do comprimento da aresta.

---

**Algoritmo 8:** Bloco I: filtragem por remoção de elemento próximo à parede e que não tem todos os nós rígidos

---

```

1 WallLength ← Calcular comprimento médio do elemento conectado à parede;
2 Volume ← calcular jacobiano do elemento;
3 height ←  $2.0 \times \text{Volume} / \text{WallLength}$ ;
4 se nó é da interface fluido-fluido ou superfície livre então
5   | safetyCoefficient ← 0.25;
6 fim
7 se height < (0.5 × safetyCoefficient × WallLength) então
8   | Remover nó;
9   | Mapear material e quantidade de nós removidos;
10 fim

```

---

O Bloco II, desenvolvido no algoritmo 9, trata elementos com nós próximos (críticos) e conectados a paredes rígidas ou flexíveis. Busca-se evitar a remoção de tais partículas, pois estão conectadas a paredes, contudo a proximidade entre as partículas pode gerar a inversão de elementos no próximo passo de tempo e prejudicar toda a análise. Nesse sentido, a estratégia computacional consiste em realizar uma busca na vizinhança a fim de realocar tal partícula nas proximidades e em último caso remover. No caso de partículas pertencentes à interface fluido-fluido, a remoção deve ser ainda mais evitada a fim de preservá-la, nesse contexto, tais partículas são removidas apenas no caso supercrítico, quando a proximidade entre as partículas inviabiliza qualquer análise coerente. Destaca-se que quanto maior o refinamento, menor é a influência dessa realocação no processo de análise, consequentemente melhor é a qualidade da solução.

O Bloco III trata de elementos com volume pequeno, que são simplesmente removidas quando seus nós (partículas) não são da interface fluido-fluido e não estão conectados a paredes. Na ocorrência de volumes ainda mais pequenos na vizinhança da interface fluido-fluido, pode ocorrer a inversão de elementos e a perda da solução, nesse contexto, a partícula crítica é realocada na vizinhança a fim de gerar um novo elemento com volume maior e preservar minimamente a interface, mantendo certa qualidade da malha. Busca-se realocar a partícula ao longo da interface fluido-fluido, ou seja, a partícula crítica é deslocada para o centro da aresta que conecta a partícula crítica com a partícula mais distante que também pertence à interface fluido-fluido. Caso não haja tal partícula disponível e o volume seja supercrítico, a partícula supercrítica é realocada para o centro da aresta com a partícula mais distante na vizinhança que

---

**Algoritmo 9:** Bloco II: estratégia de realocação na presença de elemento com aresta curta conectado à parede

---

```

1 se número de nós rígidos no elemento > 0 então
2   para cada nó1 do elemento faça
3     se nó1 não é restrito e nem de interface fluido-estrutura então
4       para cada nó2 do elemento faça
5         se nó2 não é restrito e nem de interface fluido-estrutura então
6           distNodeNode2 ← calcular distância entre nó1 e nó2;
7           se distNodeNode2 < 0.5 × h_mesh então
8             toleranceDistance ← 0.2 × h_mesh;
9             nó3 ← nó mais distante que não é da parede;
10            nó4 ← nó mais distante que não é da parede e com mesmo
11              material;
12            se existe nó4 então
13              | Realocar nó crítico (nó1) no centro da aresta nó1-N4;
14            fim
15            senão se existe nó3 e distNodeNode2 < 0.2 × h_mesh então
16              | Realocar nó crítico (nó1) no centro da aresta nó1-N3;
17            fim
18            senão se nó1 é IFF e distNodeNode2 < 0.1 × h_mesh então
19              | Remover nó supercrítico (nó1);
20              | Mapear material e quantidade de nós removidos;
21            fim
22            senão se nó1 não é IFF então
23              | Remover nó crítico (nó1);
24              | Mapear material e quantidade de nós removidos;
25            fim
26          fim
27        fim
28      fim
29    fim
30 fim

```

---

possua o mesmo material. Como última opção, a partícula supercrítica é removida, desde que não seja de bolha e não esteja conectada a paredes, sendo seu material mapeado.

---

**Algoritmo 10:** Bloco III: volume pequeno
 

---

```

1 se volume < factorCriticalVolume2D × criticalVolume então
2   para cada nó do elemento faça
3     rigidNeighborNodes ← Contabilizar nós rígidos na vizinhança (Dirichlet e IFE);
4     se rigidNeighborNodes == 0 e nó não é IFE e nó não é IFF então
5       Remover nó crítico;
6       Mapear material e quantidade de nós removidos;
7     fim
8     senão se (nó é IFF e rigidNeighborNodes == 0) e nó não é Dirichlet e não é IFE
9       então
10      toleranceDistance ← 0.2 × h_mesh;
11      nó5 ← nó mais distante com mesmo material e na interface fluido-fluido;
12      nó4 ← nó mais distante com mesmo material;
13      nó2 ← nó mais distante;
14      se existe nó5 e volume < 0.7 × factorCriticalVolume2D × criticalVolume
15        então
16          Realocar nó crítico (nó) no centro da aresta nó1-nó5;
17        fim
18      senão se existe nó4 e rigidNeighborNodes == 0 e volume < 0.4 ×
19        factorCriticalVolume2D × criticalVolume então
20          Realocar no supercrítico no centro da aresta nó1-nó4;
21        fim
22      senão se existe nó2 e nó é de bolha e volume < 0.4 ×
23        factorCriticalVolume2D × criticalVolume então
24          Realocar no supercrítico no centro da aresta nó1-nó2;
25        fim
26      senão se rigidNeighborNodes == 0 e nó não é de bolha e volume < 0.3 ×
27        factorCriticalVolume2D × criticalVolume então
28          Remover nó supercrítico;
29          Mapear material e quantidade de nós removidos;
30        fim
31      fim
32    fim
33  fim
  
```

---

O Bloco III.I está alocado dentro do tratamento de volumes pequenos (ver Bloco III). A sua especificidade é tratar as partículas que estão conectadas a paredes, ou seja, regiões de interface fluido-estrutura ou fluido-parede rígida. No PFEM tradicional as partículas seriam simplesmente removidas, contudo no caso multifásico, isso pode gerar fortes inconsistências, pois o meio fluido pode estar preenchendo todo o espaço entre a partícula e a parede, dificultando

a utilização do  $\alpha$ -shape para o controle do contato fluido-parede. Nesse sentido, a partícula crítica é realocada para o centro da aresta mais distante com mesmo material na vizinhança, sendo removida apenas na ocorrência de elementos com volumes extremamente pequenos e sem opções de realocação.

---

**Algoritmo 11:** Desenvolvimento Bloco III.I
 

---

```

1 senão se (rigidNeighborNodes) e nó não é Dirichlet e não é IFE então
2   toleranceDistance  $\leftarrow 0.2 \times h\_mesh$ ;
3   Determinar na vizinhança do nó crítico;;
4   início
5     nó 5  $\leftarrow$  Nó mais distante com mesmo material e na interface fluido-fluido;
6     nó 4  $\leftarrow$  Nó mais distante com mesmo material;
7     nó 2  $\leftarrow$  Nó mais distante;
8   fim
9   se existe nó 4 e volume  $< 0.7 \times \text{factorCriticalVolume2D} \times \text{criticalVolume}$  então
10    Realocar nó crítico (nó) no centro da aresta nó1-nó4;
11  fim
12  senão se existe nó2 e volume  $< 0.3 \times \text{factorCriticalVolume2D} \times \text{criticalVolume}$ 
13    então
14    Realocar nó Supercrítico no centro da aresta nó1-nó2;
15  fim
16  senão se rigidNeighborNodes  $< 2$  e volume  $< 0.1 \times \text{factorCriticalVolume2D} \times$ 
17    criticalVolume então
18    Remover nó Supercrítico;
19    Mapear material e quantidade de nós removidos;
20  fim
21 fim

```

---

Os nós removidos nos Blocos I, II e III são mapeados por domínio de fluido a fim de que o refinamento adaptativo conserve a mesma densidade de partículas em cada região de diferentes materiais do escoamento ao longo do processo de análise. O algoritmo 12 ilustra cada etapa da geração dos novos nós para cada domínio de fluido. Nota-se que esse processo constitui essencialmente em um refinamento adaptativo, onde a distribuição nodal uniforme é buscada em cada domínio de fluido, resultando em uma malha de melhor qualidade no contexto de formulações Lagrangianas com mudanças topológicas e permitindo a análise de escoamentos multifásicos.

A síntese do algoritmo 12 é que para cada tipo de material removido (fluido A, fluido B, etc.), é calculada a quantidade de elementos a serem refinados, que é equivalente ao número de nós removidos desse material. O refinamento ocorre na maior aresta do elemento do mesmo domínio de fluido, desde que o elemento não seja classificado como "perigoso" para refinamento, ou seja, não tenha arestas muito curtas, múltiplos materiais ou restrições, conforme ilustra o pseudocódigo. Esse refinamento gera um nova partícula (nó) no centro da aresta do elemento finito, permitindo a interpolação dos valores nodais pela simples média aritmética dos valores

nodais dos nós que compõem a aresta.

---

**Algoritmo 12:** Geração multidomínio de novos nós para refinamento

---

```

1 para cada Cada tipo de material removido faça
2   elementsToRefine ← numberOfNodesToRemoveThisMaterial ;
3   extraNodes ← info_numberOfNodes_ – info_numberOfInitialNodes_;
4   toleratedExtraNodes ← 0.05 × info_numberOfInitialNodes_;
5   se elementsToRefine > 0 então
6     Inicializar variáveis;
7     countNodes ← 0
8     para cada Elemento el em elements faça
9       Calcular no elemento;;
10      início
11        - Número de nós rígidos (Dirichlet/IFE);
12        - Número de nós de superfície livre;
13        - Número de nós de interface fluido-fluido;
14        - Número de materiais nodais distintos;
15      fim
16    fim
17    Procurar elementos perigosos para evitar refinamento: elementos com arestas
18    muito curtas, múltiplos materiais ou restrições;
19    se Elemento não é perigoso e não teve nós removidos então
20      Adicionar nó na maior aresta do mesmo domínio fluido;
21      Interpolar valores nodais na nova partícula da aresta;
22      countNodes++;
23    fim
24 fim

```

---

Por fim, destaca-se que a estratégia de remalhamento por domínio de fluido é o que fundamentalmente permite a análise de escoamentos multifásicos pelo PFEM. As técnicas adicionais de realocação de partículas no contexto de elementos próximos à parede e de volumes pequenos são desenvolvidas para a análise de escoamentos com mudanças topológicas no contexto de múltiplos materiais.

## 7.4 Exemplos de verificação e validação

Esta seção apresenta exemplos para a validação e verificação da formulação implementada para escoamentos multifásicos incompressíveis. Essa abordagem é validada com resultados experimentais e o seu potencial para a análise de escoamentos com múltiplas interfaces é verificado.

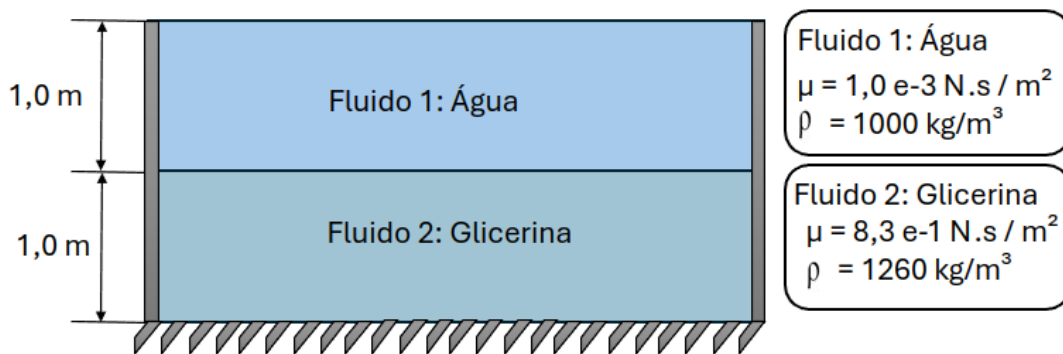
### 7.4.1 Coluna de fluidos: análise estática para verificação da pressão

#### Caso 1 - Problema bifásico

Este exemplo consiste na análise de dois fluidos: água e glicerina, inicialmente dispostos na configuração que se espera encontrar o equilíbrio, tratando-se de um problema da estática dos fluidos. O objetivo da análise é verificar o campo de pressão e comparar com o resultado analítico.

A Figura 53 mostra a geometria do problema com as condições iniciais e características físicas. Cada camada de fluido possui 1 m de espessura, o modelo é bidimensional e as condições de contorno são de paredes aderentes (Dirichlet) nas laterais e na base, e de força de superfície nula na face superior (Neumann). O valor da gravidade é adotado como  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

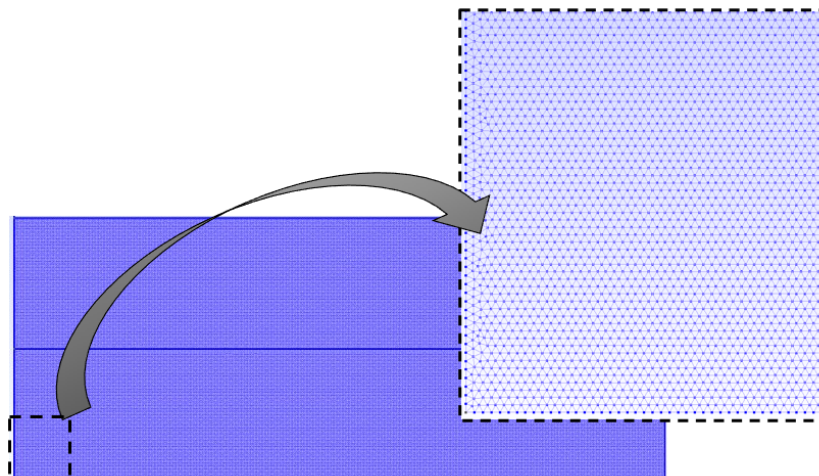
Figura 53 – Estático bifásico: geometria e propriedades.



Fonte: Autoria Própria.

A malha de elementos finitos aplicada utiliza elementos triangulares de aproximação linear e possui tamanho característico  $h = 0,01 \text{ m}$ , conforme ilustra a Figura 54.

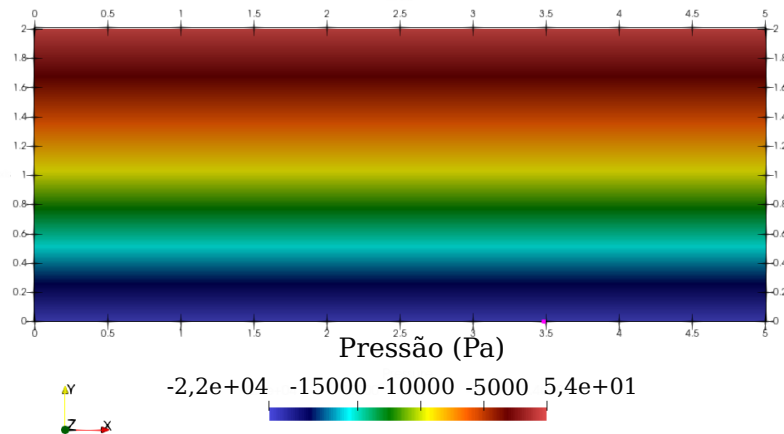
Figura 54 – Estático bifásico: malha de elementos finitos triangulares.



Fonte: Autoria Própria.

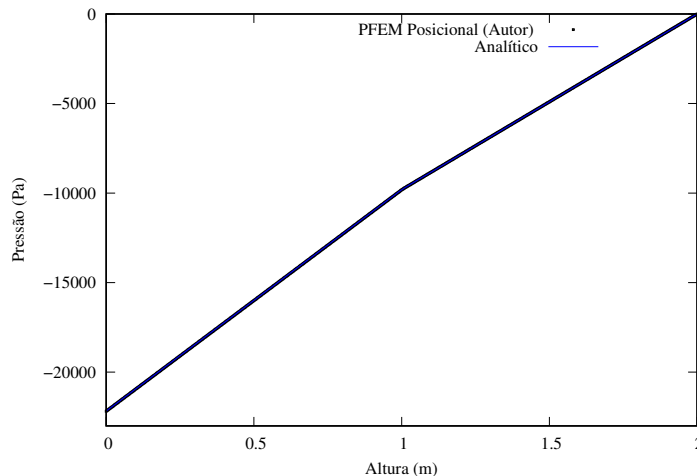
A Figura 55 apresenta o resultado obtido para o campo de pressão, com unidades em Pascal. Em termos quantitativos, o valor da pressão máxima (que ocorre na base da coluna de fluidos) corresponde a 99% do analítico.

Figura 55 – Estático bifásico: campo de pressão para um modelo de duas camadas de fluidos.



A Figura 56 destaca o perfil de pressão em função da altura, comparando o resultado numérico com o analítico. Nota-se que os valores calculados da pressão apresentam boa compatibilidade quantitativa com o analítico ao longo de toda a altura.

Figura 56 – Estático bifásico: perfis de pressão numérico e analítico.



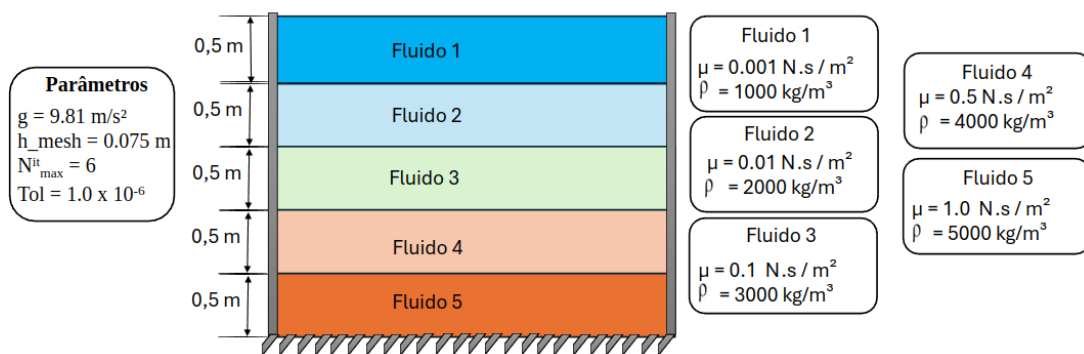
## Caso 2 - Problema multifásico

Este exemplo consiste na análise de 5 fluidos genéricos, considerando uma variação robusta de massa específica entre as camadas. O caso estático é analisado a fim de que se possa verificar o campo de pressão numérico com o analítico para o caso com múltiplos fluidos.

A geometria consiste em um reservatório retangular com altura total de 2,5 m e largura uniforme, onde cada camada possui uma espessura de 0,5 m. As propriedades dos fluidos

variam de forma estratificada, com valores crescentes de viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) e massa específica ( $\rho$ ) da camada superior para a inferior (ver Figura 57). O fluido 1 (camada superior) possui  $\mu = 0,001 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ . O fluido 2 apresenta  $\mu = 0,01 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$ . O fluido 3 tem  $\mu = 0,1 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$ . O fluido 4 possui  $\mu = 0,5 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 4000 \text{ kg m}^{-3}$ . Por fim, o fluido 5 (camada inferior) apresenta  $\mu = 1,0 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 5000 \text{ kg m}^{-3}$ .

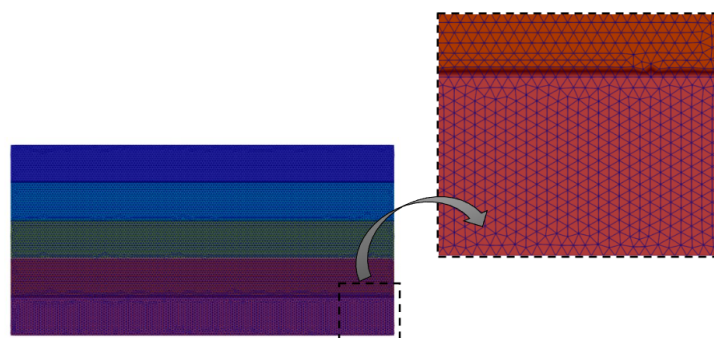
Figura 57 – Modelo estático com 5 camadas de fluidos com diferentes materiais.



Fonte: Autoria Própria.

As condições de contorno incluem uma base e paredes laterais aderentes. Na parte superior trata-se de uma interface com superfície livre. Os parâmetros adicionais do problema incluem aceleração da gravidade  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  e para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho característico de  $0,075 \text{ m}$  (ver malha na Figura 58).

Figura 58 – Estático multifásico: malha de elementos finitos triangulares.

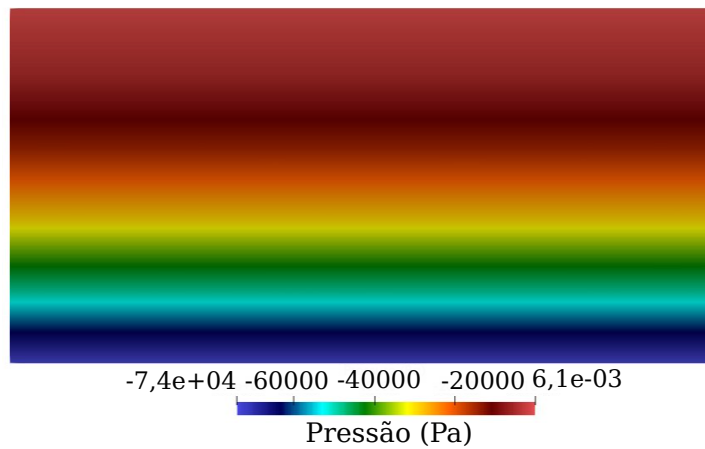


Fonte: Autoria Própria.

A Figura 59 apresenta o resultado obtido para o campo de pressão, com unidades em Pa. Nota-se que o valor da pressão na base corresponde a 99% do analítico.

Fazendo uma análise paramétrica da pressão máxima obtida no fundo do tanque em relação à previsão analítica de  $p_{preferencia} = 74630,8 \text{ Pa}$ , variando o comprimento característico da malha entre  $0,5 \text{ m}$  e  $0,033 \text{ m}$ , obtém-se o comportamento de convergência à medida que se refina a malha no PFEM, conforme ilustra a Figura 60. Embora a discretização possa representar

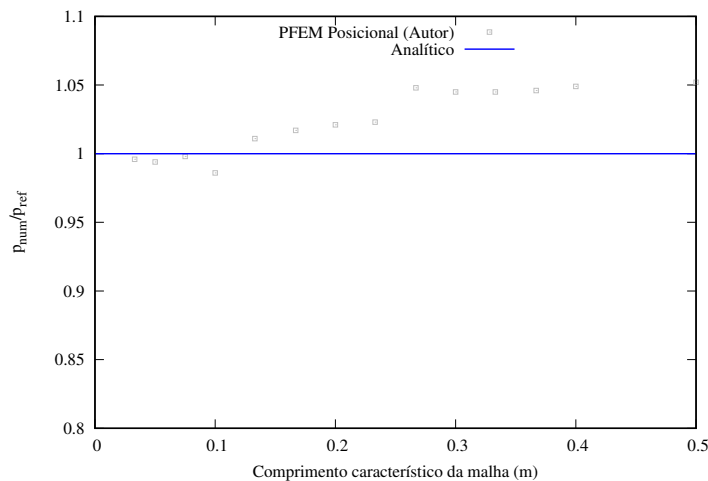
Figura 59 – Estático multifásico: campo de pressão para um modelo com múltiplas camadas de fluidos.



Fonte: Autoria Própria.

de forma exata a distribuição linear de pressão monofásica, na transição entre os fluidos é necessário um maior número de elementos para capturar a descontinuidade, justificando o menor erro numérico obtido com a malha mais fina.

Figura 60 – Estático multifásico: análise de convergência da pressão.



Fonte: Autoria Própria.

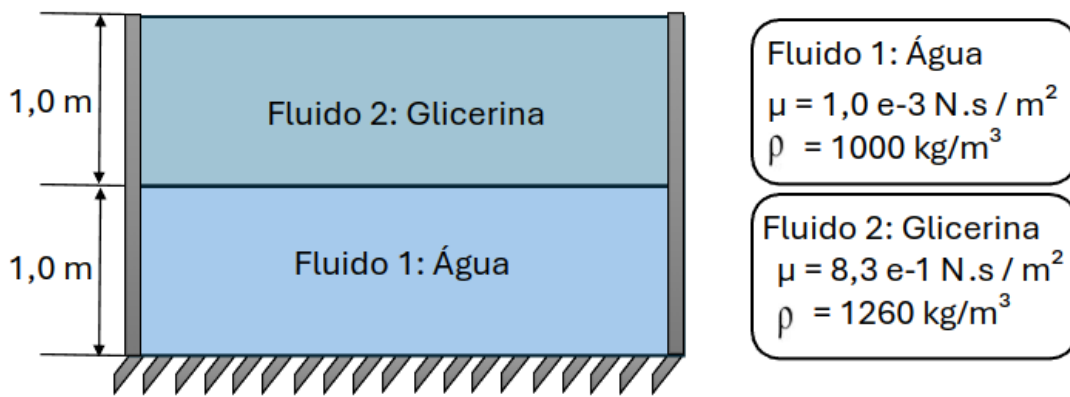
## 7.4.2 Decantação bifásica com superfície livre

Este segundo caso trata-se de um problema dinâmico da mecânica dos fluidos com múltiplas interfaces. Esse modelo permite simular o fenômeno da decantação de fluidos, cuja configuração estável é obtida com a inversão das camadas. O problema é proposto com os mesmos fluidos do caso 1 da seção 7.4.1, mas agora em posições inversas. Devido à ação da gravidade, as camadas são invertidas e ao final o campo de pressão pode ser verificado para a

configuração permanente. As condições de contorno são de paredes aderentes (Dirichlet) nas laterais e na base, e de força de superfície nula na face superior (Neumann).

A Figura 61 apresenta o esquema aplicado na simulação. Observe que neste caso, o fluido mais denso começa no topo, então trata-se de um problema de decantação, cuja solução final é obtida pela inversão das camadas. A geometria consiste em um reservatório retangular com altura total de 2,0 m e largura uniforme, onde cada camada possui uma espessura de 1,0 m. A glicerina (camada superior) possui  $\mu = 0,83 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1260 \text{ kg m}^{-3}$ . A água (camada inferior) apresenta  $\mu = 0,001 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ .

Figura 61 – Decantação bifásica: condição inicial e características físicas.



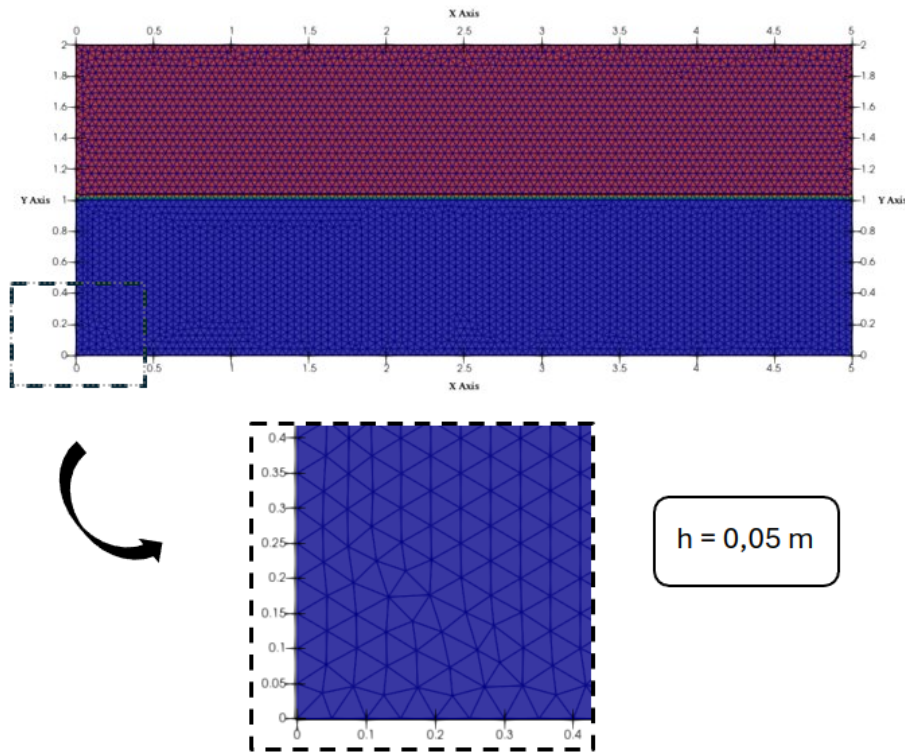
Fonte: Autoria Própria.

A malha utilizada possui comprimento característico  $h = 0,05 \text{ m}$  e é constituída por elementos triangulares de aproximação linear, conforme detalhado pela Figura 62. A aceleração da gravidade é adotada como  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,0005 \text{ s}$ , o raio espectral é  $\rho_\infty = 0,8$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 6$ , a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-6}$ , e o parâmetro  $\alpha$ -shape é adotado como  $\alpha_s = 1,15$ . Assume-se que as próprias características das malhas não estruturadas adotadas introduzam perturbação no equilíbrio instável, não sendo adicionada nenhuma perturbação adicional ao problema.

A Figura 63 ilustra para alguns passos de tempo o caminho de solução dinâmica até a quase-estacionariedade em 40,75 s. Lentamente nota-se pequenas perturbações na interface, com interpenetração entre os fluidos. Essas perturbações se expandem e ganham velocidade, como pode ser visto pela distribuição de densidade em diferentes instantes na Figura 63. Após 40,75 s, observa-se que houve a inversão completa e o fluido está novamente separado em duas camadas, mas em uma configuração mais próxima à de equilíbrio estático estável, interrompendo-se a análise. Para que seja atingido o regime estacionário ainda é necessário mais tempo de processamento, tendo em vista especialmente a baixa viscosidade da água, porém não é do interesse deste exemplo.

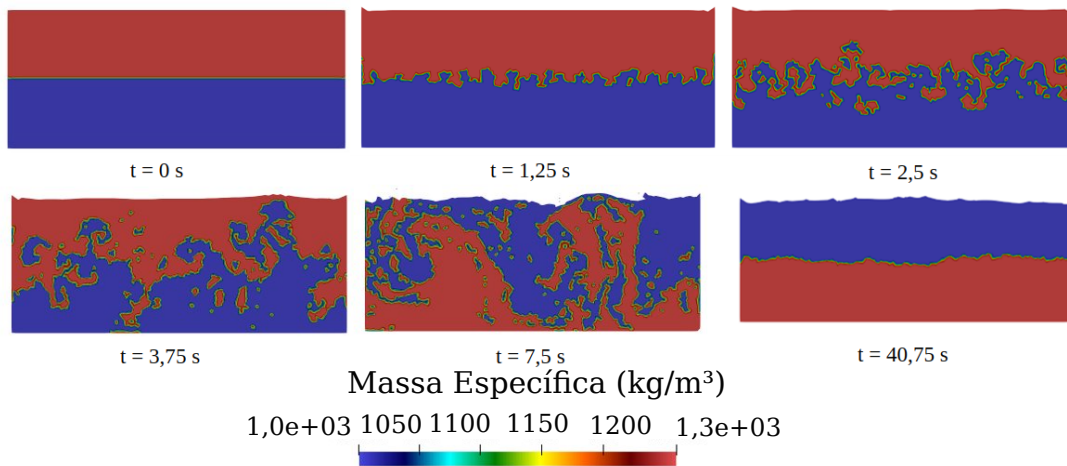
Para o instante de tempo  $t = 40,75 \text{ s}$ , apresenta-se o resultado para o campo de pressão

Figura 62 – Decantação bifásica: malha de elementos finitos triangulares.



Fonte: Aatoria Própria.

Figura 63 – Decantação bifásica: caminho de solução da dinâmica de fluidos bifásica com múltiplas interfaces.

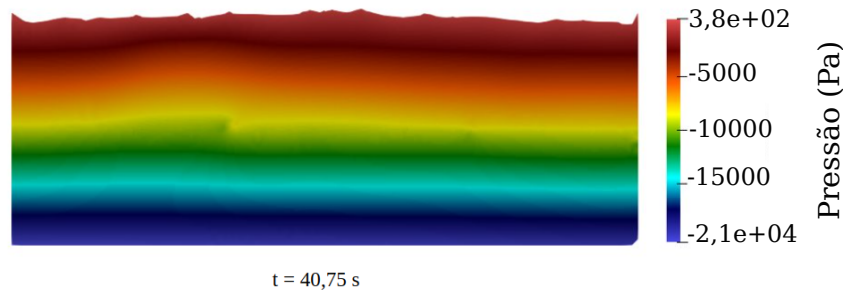


Fonte: Aatoria Própria.

(Figura 64). Nota-se que as pressões são dadas em Pascal (Pa).

### 7.4.3 Decantação multifásica com superfície livre

Este exemplo simula um problema dinâmico da mecânica dos fluidos, onde ocorre a existência de múltiplos fluidos com múltiplas interfaces e superfície livre. Esse modelo permite

Figura 64 – Decantação bifásica: campo de pressão para o instante  $t = 40,75$  s.

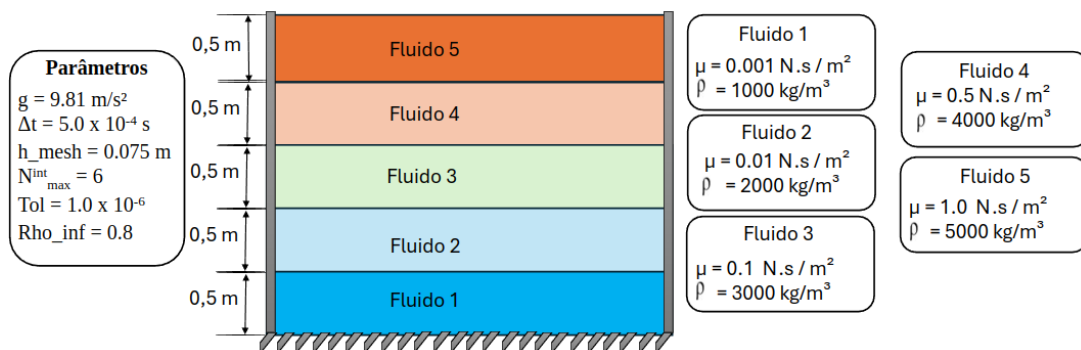
t = 40,75 s

Fonte: Autoria Própria.

simular o fenômeno da decantação com múltiplos fluidos, cuja configuração estável é obtida com a inversão das camadas. Nota-se a variação considerável de propriedades entre os fluidos, o que pode representar instabilidades em algumas formulações, contudo a abordagem implementada permite essa simulação com sucesso. O problema é proposto com os mesmos fluidos da parte multifásica da seção 7.4.1, mas agora em posições inversas. Devido à ação da gravidade, as camadas são invertidas e ao final os campos de posição e pressão podem ser verificados para a configuração permanente. As condições de contorno são de paredes aderentes (Dirichlet) nas laterais e na base, e de força de superfície nula na face superior (Neumann).

A Figura 65 apresenta a geometria inicial e as propriedades para a análise numérica do problema. Observa-se que o fluido mais denso começa no topo, então trata-se de um problema de decantação, de forma que o equilíbrio estático estável é obtido pela inversão completa da configuração inicial. A geometria consiste em um reservatório retangular com altura total de 2,5 m e largura uniforme, onde cada camada possui uma espessura de 0,5 m. O fluido 1 (camada inferior) possui  $\mu = 0,001 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ . O fluido 2 apresenta  $\mu = 0,01 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$ . O fluido 3 tem  $\mu = 0,1 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$ . O fluido 4 possui  $\mu = 0,5 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 4000 \text{ kg m}^{-3}$ . Por fim, o fluido 5 (camada superior) apresenta  $\mu = 1,0 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 5000 \text{ kg m}^{-3}$ .

Figura 65 – Decantação multifásica: geometria e propriedades físicas.



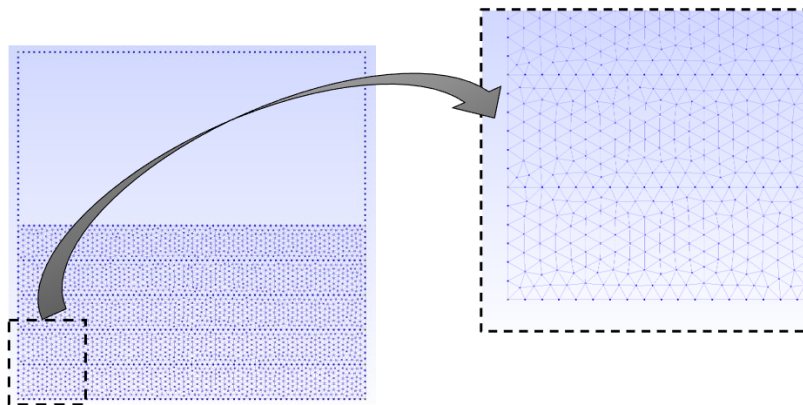
Fonte: Autoria Própria.

As condições de contorno incluem uma base e paredes laterais aderentes. Na parte

superior trata-se de uma interface com superfície livre. Os parâmetros adicionais do problema incluem aceleração da gravidade  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  e para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho característico de  $0,075 \text{ m}$  (ver malha na Figura 66).

O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,0005 \text{ s}$ , o raio espectral é  $\rho_\infty = 0,8$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 6$ , a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-6}$ , e o parâmetro  $\alpha$ -shape é adotado como  $\alpha_s = 1,25$ . Assume-se que as próprias características da malha não estruturada introduzam perturbação no equilíbrio instável, não sendo adicionada nenhuma perturbação adicional ao problema.

Figura 66 – Decantação multifásica: discretização inicial com elementos finitos triangulares.



Fonte: Autoria Própria.

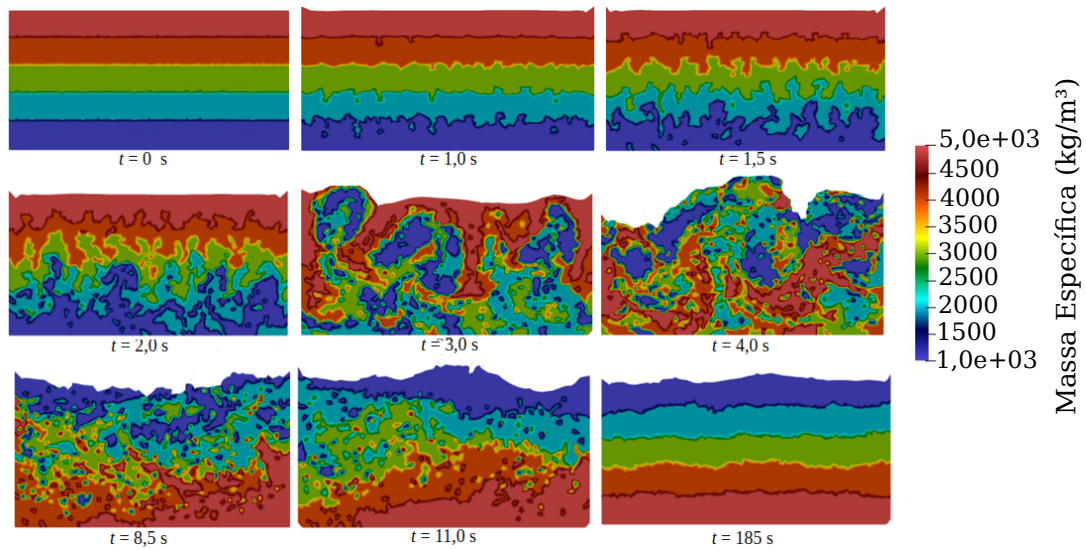
O fluido da base deve precipitar até a superfície livre, o da face superior deve decantar até a base e o de densidade intermediária deve recuperar a posição inicial, conforme ilustra a Figura 67. Destaca-se que em muitos problemas de interação fluido-fluido, a transmissão e atualização de variáveis na interface torna-se um grande desafio, em especial em casos como este, onde ocorre o surgimento e a união de interfaces. Nesse contexto, a Figura 67 também ilustra a robustez da abordagem implementada, permitindo a captura dinâmica e automática das múltiplas interfaces fluido-fluido.

De forma complementar, a Figura 68 apresenta o campo de pressão ao longo do tempo para alguns passos de tempo, onde é possível notar que a presente metodologia resulta em campos estáveis e qualitativamente consistentes de pressão, mesmo para este problema com interfaces complexas. Nota-se que para o instante  $t = 185 \text{ s}$ , o valor máximo do campo de pressão apresenta 98% de compatibilidade com o analítico para a configuração estática estável.

A Figura 69 apresenta a componente vertical do campo de velocidades em diferentes instantes, onde observa-se a tendência intercalada de ascensão (velocidade positiva) e descida (velocidade negativa) dos fluidos.

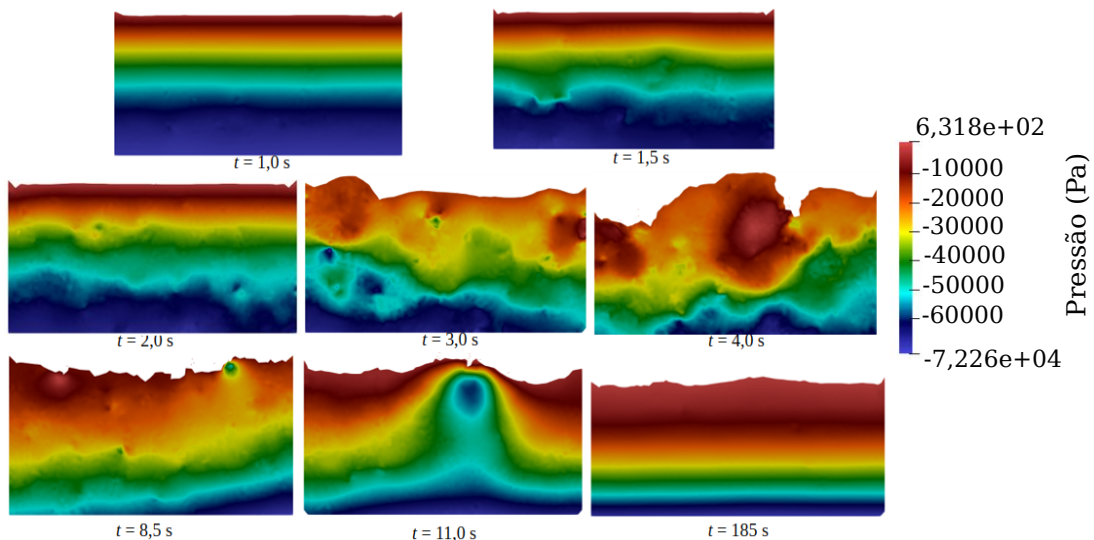
Nota-se que a metodologia mostrou-se bastante robusta para tratar de problema com múltiplas interfaces fluido-fluido complexas, além de resultar em campos qualitativamente

Figura 67 – Decantação multifásica: caminho de solução da dinâmica de fluidos multifásica com múltiplas interfaces.



Fonte: Aatoria Própria.

Figura 68 – Decantação multifásica: distribuição de pressão em diferentes instantes.



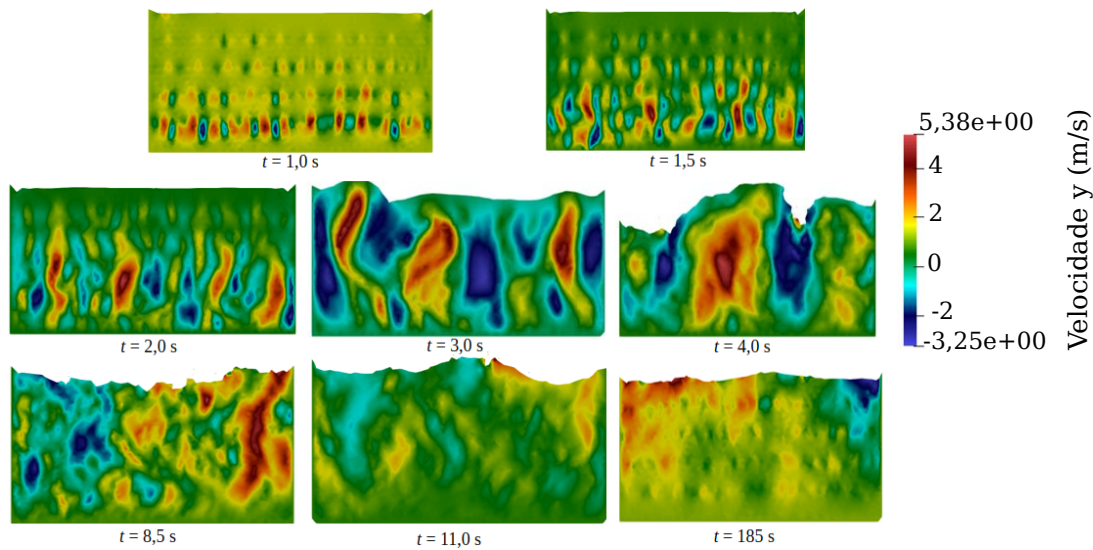
Fonte: Aatoria Própria.

consistentes para as variáveis analisadas. Novamente a análise foi conduzida apenas até a separação total das camadas, e não até o resultado estacionário, o qual demandaria maior tempo de processamento.

#### 7.4.4 Rompimento de barragem de água considerando a presença do ar

Este estudo trata-se de um *benchmark* clássico para os métodos dedicados à análise de escoamentos com superfície livre, onde uma coluna de água, suportada por uma comporta rígida à direita encontra-se inicialmente em repouso, sendo que, no instante inicial da análise, a comporta

Figura 69 – Decantação multifásica: campo de velocidades verticais ao longo do tempo.

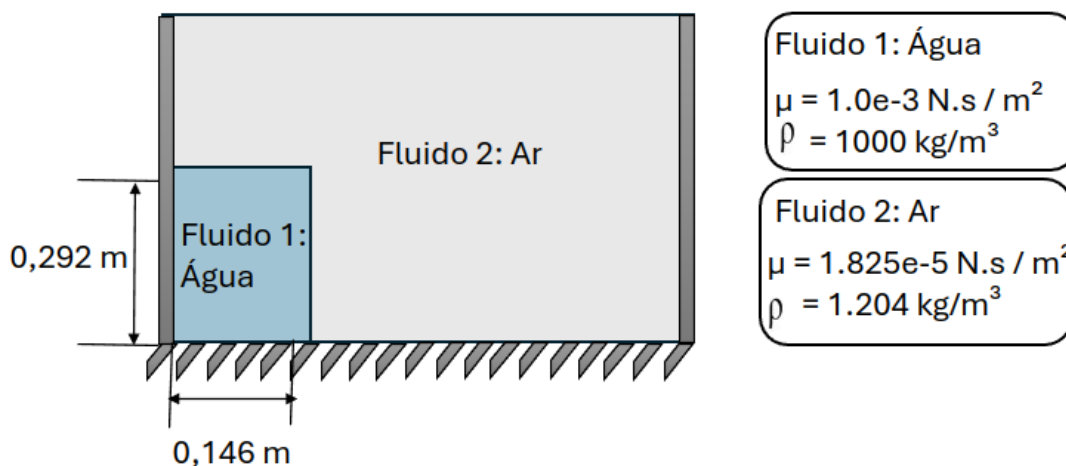


Fonte: Autoria Própria.

é subitamente removida. Este exemplo foi estudado por diversos autores, tendo sido estudado experimentalmente por Koshizuka *et al.* (1995) e Martin e Moyce (1952), e numericamente com outros métodos ou abordagens por Avancini (2023), Avancini *et al.* (2024), Hirt e Nichols (1981) e Koshizuka e Oka (1996), geralmente, desprezando-se a presença do ar nas análises numéricas.

O problema consiste no rompimento de uma barragem de água de dimensões  $[L \times 2L]$ , sendo  $L = 0,146$  m, conforme apresentado no esquema da Figura 70. O domínio preenchido por ar é representado com dimensões  $[4L \times 4L]$ . A água é simulada com as propriedades físicas  $\mu = 0,001 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ , enquanto para o ar considera-se  $\mu = 0,00001825 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1,204 \text{ kg m}^{-3}$ .

Figura 70 – Rompimento de barragem: modelo para a análise do rompimento de uma barragem de água, considerando a presença do ar.



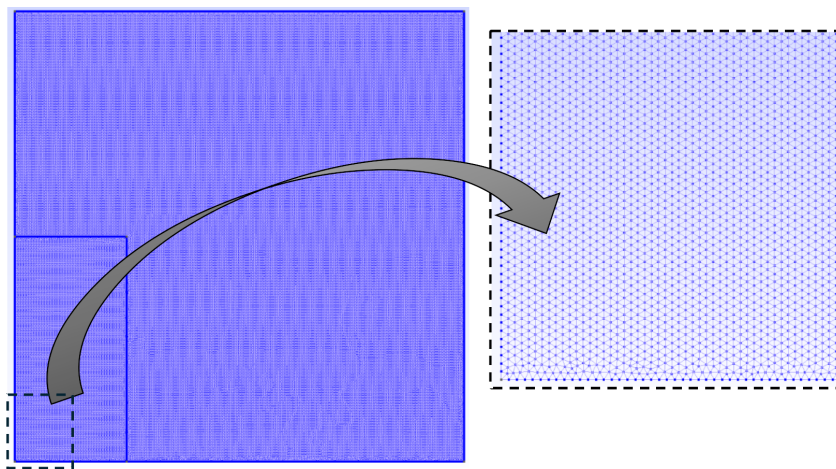
Fonte: Autoria Própria.

As condições de contorno incluem uma base e paredes laterais aderentes. Na parte

superior trata-se do limite da modelagem do ar (sendo simulado tanto como fronteira impermeável como limite de superfície livre no ar). Os demais parâmetros do problema incluem aceleração da gravidade  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  e para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho característico de 0,001 m (ver malha na Figura 71).

O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,0005 \text{ s}$ , o raio espectral é  $\rho_\infty = 0,5$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 4$ , a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-4}$ , e o parâmetro  $\alpha$ -shape é adotado como  $\alpha_s = 1,25$  no caso da simulação da fronteira de modelagem do ar como superfície livre.

Figura 71 – Rompimento de barragem: discretização inicial com elementos finitos triangulares.

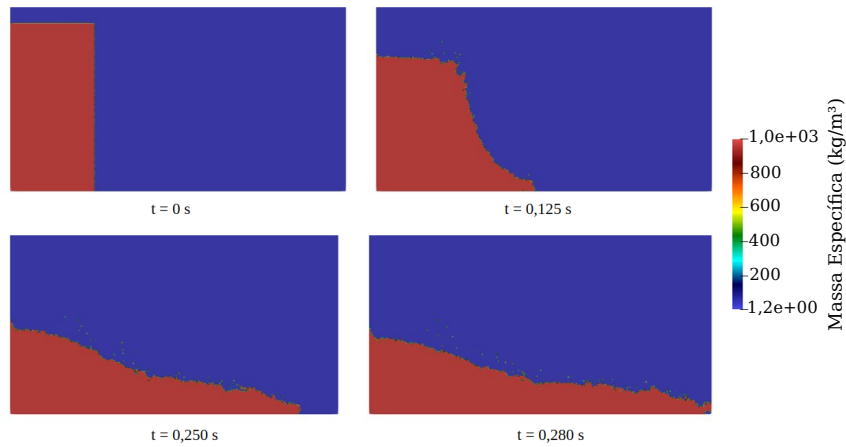


Fonte: Autoria Própria.

A Figura 72 ilustra a configuração do rompimento para alguns passos de tempo. Observa-se a captura natural da interface fluido-ar, que neste caso trata-se da superfície livre. É importante destacar que, na simulação com contornos fechados, não há realmente uma superfície livre no modelo definido, sendo possível a solução sem necessidade de aplicar o método  $\alpha$ -shape, pois o contorno da superfície livre para a água é a interface água-ar. Isso conduz a uma abordagem mais robusta e consistente, pois não há a necessidade de aplicar critérios geométricos para a delimitação da superfície livre, aplicando-se apenas o remalhamento pela triangulação de Delaunay e tomando-se os devidos cuidados com a qualidade da malha, como descrito neste texto.

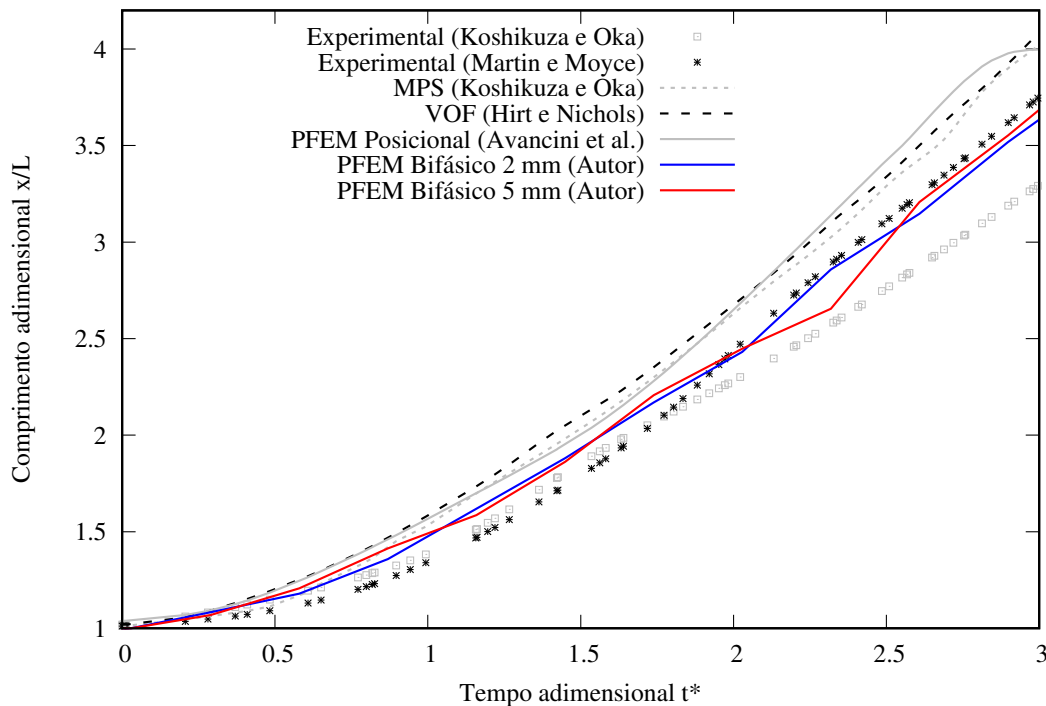
A Figura 73 compara os resultados obtidos pelo presente trabalho com discretizações com comprimento característicos  $h = 5 \text{ mm}$  e  $h = 2 \text{ mm}$  com resultados experimentais obtidos por Koshizuka *et al.* (1995) e Martin e Moyce (1952), e com resultados numéricos que desprezam a presença do ar, obtidos por Avancini *et al.* (2024), Hirt e Nichols (1981) e Koshizuka e Oka (1996). Koshizuka e Oka (1996) desenvolvem uma abordagem numérica baseada em partículas, Avancini *et al.* (2024) propõem uma estratégia mista de malha e partículas em termos de posições para o tratamento de superfícies livres, enquanto Hirt e Nichols (1981) utilizam o método VOF (*Volume of Fluid*) para a captura de contornos livres.

Figura 72 – Rompimento de barragem: configuração do rompimento da barragem de água ao longo do tempo considerando o ar.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 73 – Rompimento de barragem: validação com resultados experimentais da ruptura da barragem de água.



Fonte: Autoria Própria.

Para comparação, as variáveis são adimensionalizadas, de modo que o parâmetro  $t^*$  refere-se ao tempo adimensional dado por  $t^* = t\sqrt{2g/L}$ . Onde  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  denota a gravidade e  $L = 0.146 \text{ m}$  refere-se ao comprimento característico do escoamento, dado pelo tamanho inicial da base da coluna de água. A variável  $x$  mede o tamanho atual da base da barragem de água e é expresso de forma adimensional ao longo do tempo pela Figura 73.

Destaca-se que a Figura 73 exprime a validação do modelo proposto, onde nota-se que a abordagem proposta apresenta resultados consistentes com os dados experimentais, sendo a

abordagem numérica que mais se aproxima da curva experimental. Isso se deve pela consideração do ar como um fluido, resultando na consideração da energia de dissipação viscosa do contato ar-água, o que não ocorre nas demais abordagens. Por fim, nota-se que a velocidade de abertura da barragem de água é finita no caso experimental, enquanto nas abordagens numéricas a abertura é instantânea, o que pode levar a pequenas diferenças adicionais.

### 7.4.5 Rompimento de barragem sobre obstáculo rígido considerando a presença do ar

Este exemplo é uma extensão do anterior, e também foi estudado experimentalmente por Koshizuka *et al.* (1995). Trata-se do colapso da mesma coluna de água, porém considerando-se um obstáculo rígido retangular na metade do domínio. Este problema, assim como o anterior, está presente em diversos trabalhos e há muitas soluções numéricas disponíveis na literatura, como por exemplo em Avancini *et al.* (2024), Avancini (2023), Avancini (2018), Idelsohn *et al.* (2014) e Larese *et al.* (2008).

O problema consiste no rompimento de uma barragem de água de dimensões  $[L \times 2L]$ , sendo  $L = 0,146$  m, conforme apresentado no esquema da Figura 74. O domínio preenchido por ar é representado com dimensões  $[4L \times 2,5L]$ . A água é simulada com as propriedades físicas  $\mu = 0,001 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ , enquanto para o ar considera-se  $\mu = 0,00001825 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1,204 \text{ kg m}^{-3}$ .

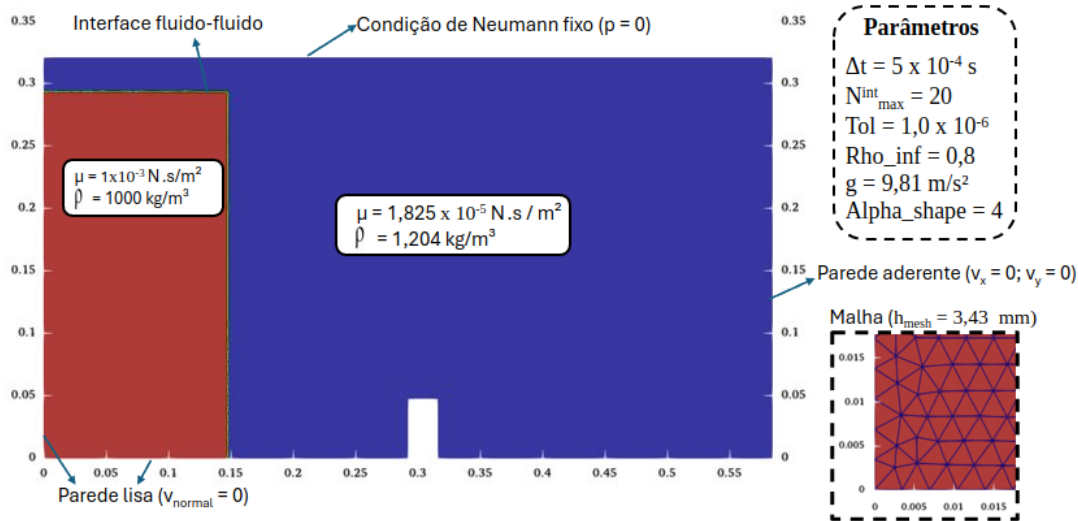
As condições de contorno incluem uma base e parede esquerda lisas; obstáculo e parede direita aderentes; e na parte superior trata-se do limite da modelagem do ar, sendo simulado com a técnica de contorno espacialmente fixo com condição de Neumann nula (ver seção 6.2.2). Os demais parâmetros do problema incluem aceleração da gravidade  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  e para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho característico de  $0,00343$  m (ver malha na Figura 74).

O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,0005$  s, o raio espectral é  $\rho_\infty = 0,8$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 20$ , a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-6}$ , e o parâmetro  $\alpha$ -shape é adotado como  $\alpha_s = 4$  para mostrar que seu uso não afeta mais na determinação dos contornos geométricos do problema fechado.

No contexto do PFEM tradicional, baseado em velocidades, este exemplo é simulado numericamente por Larese *et al.* (2008), com abordagem monofásica e por Idelsohn *et al.* (2014) com uma formulação bifásica do PFEM clássico. Este exemplo também foi simulado com o PFEM posicional, contudo apenas com uma abordagem monofásica, conforme pode ser visto em Avancini (2018) e Avancini *et al.* (2024).

Avaliando os resultados numéricos da literatura, nota-se que em Avancini (2018) o campo de posições apresentado apresenta boa compatibilidade com o experimental de Koshizuka *et al.*

Figura 74 – Rompimento de barragem com impacto: geometria, malha e propriedades gerais.



Fonte: Autoria Própria.

(1995) até 0,3 s; em Avancini *et al.* (2024) o campo de posições apresenta boa compatibilidade com o experimental até 0,4 s; e em Larese *et al.* (2008) o campo de posições apresenta boa compatibilidade com o experimental até 0,4 s. Isso ocorre porque a presença do ar começa a ser bastante significativa após o impacto com a segunda parede, contudo em tais trabalhos não se considera a presença do ar, devido ao uso do PFEM monofásico.

Em Idelsohn *et al.* (2014) o campo de posições apresenta boa compatibilidade com o experimental até 0,3 s; mas consegue uma representação média do bolsão de ar até 0,5 s (ver Figura 75). onde é obtido apenas uma solução média das posições com relação ao experimental. Isso ocorre pois os autores utilizam uma abordagem bifásica, contudo isso introduz dificuldades adicionais no tratamento da interface fluido-fluido e pode prejudicar o contato fluido-parede tradicional do PFEM, pois com a simulação bifásica, todo o domínio já fica preenchido com fluido, afetando a utilização do PFEM tradicional para contato. Além disso, na interface fluido-ar ocorre grandes distorções dos elementos finitos, distorção tal que não estava presente na simulação monofásica, limitando a qualidade do remalhamento do PFEM tradicional.

Comparando os resultados obtidos com a abordagem proposta, nota-se que o campo de posições apresenta boa compatibilidade tanto com os numéricos quanto com o experimental para os instantes de 0,1 s, 0,2 s e 0,3 s (ver Figura 75). Para os instantes de 0,4 s e 0,5 s, nota-se a captura do bolsão de ar, e especialmente para o instante de 0,5 s, nota-se que o formato do bolsão de ar é melhor representado pela abordagem proposta.

Por fim, destaca-se a complexidade deste exemplo, a qual é notada pela presença de várias não linearidades, como a interação fluido-ar com alto fator de densidade  $r_\rho = \frac{\rho_{\text{water}}}{\rho_{\text{air}}} = 831$ , contato fluido-parade com a presença do ar, grandes distorções e mudanças topológicas no domínio do fluido com desprendimento de partículas. Além disso, nota-se que a não linearidade do problema de contato com a primeira parede afeta a configuração da interface fluido-ar e

impacta diretamente na solução dos demais passos de tempo. Nesse sentido, a formação e captura do bolsão de ar no último passo de tempo depende fortemente da boa aplicação do modelo de contato fluido-parede e da interação água-ar. Vale notar também que no contexto experimental, a barragem de água é liberada com uma velocidade finita para a comporta vertical, já no contexto numérico, a barragem é liberada de forma instantânea. Apesar disso, os resultados obtidos apresentam boa concordância com as capturas experimentais de Koshizuka *et al.* (1995), conforme ilustra a Figura 75.

#### 7.4.6 *Sloshing* de um fluido viscoso considerando o ar

Este exemplo visa simular o *sloshing* de um fluido viscoso considerando a presença do ar. A condição inicial do problema é de fluido em repouso conforme apresentado na Figura 76, que ilustra também a geometria, as propriedades físicas e os dados utilizados para a análise numérica. Considera-se o reservatório a céu aberto, sendo que o contorno superior é considerado espacialmente fixo com condição de Neumann (livre para entrada ou saída de fluido, mas geometricamente fixo e definido), conforme descrito na seção 6.2.2.

O problema consiste em um reservatório de dimensões  $[L \times L]$ , sendo  $L = 0,5$  m, conforme apresentado no esquema da Figura 76. A configuração inicial apresenta um fluido viscoso em repouso na parte inferior, com sua face superior inclinada (interface fluido-ar); o restante do reservatório é preenchido por ar, conforme detalhado na Figura 76. O fluido viscoso é simulado com as propriedades físicas  $\mu = 5 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ , enquanto para o ar considera-se  $\mu = 0,000\,018\,25 \text{ N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1,204 \text{ kg m}^{-3}$ .

Os demais parâmetros do problema incluem aceleração da gravidade  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  e para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho característico de  $0,005$  m (ver malha na Figura 76). O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,001$  s, o raio espectral é  $\rho_\infty = 0,8$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 4$  e a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-4}$ .

Em relação às condições de contorno das paredes do reservatório, duas situações são consideradas: a) reservatório com paredes aderentes; b) reservatório com paredes lisas. Ambos casos são simulados considerando o reservatório a céu aberto, considerando a situação de superfície livre por meio da interface fluido-ar naturalmente capturada pelo modelo utilizado; e contorno superior espacialmente fixo com condição de Neumann nula. O primeiro caso (a) é simulado com paredes aderentes, assim como em Avancini (2023) e o segundo (b) com paredes lisas, assim como por Franci (2016). Apesar da técnica de paredes lisas no PFEM ser detalhada em 6.2, aloca-se este exemplo nesta seção devido a presença do modelo bifásico.

A Figura 76 ilustra a geometria e as propriedades gerais válidas para ambos casos (a e b). Apenas as condições de contorno variam, conforme já detalhado.

A Figura 77 ilustra a configuração da malha para os passos de tempo de análise do

problema, apresentando o desenvolvimento da malha pelo remalhamento dinâmico do PFEM. Destaca-se que neste exemplo, apesar de se utilizar o PFEM, o parâmetro geométrico  $\alpha$ -shape não tem relevância na análise, pois a interface fluido-ar é naturalmente determinada internamente pelo modelo de escoamento bifásico; além disso todos contornos do problema são espacialmente fixos, dispensando-se totalmente o  $\alpha$ -shape para a delimitação dos contornos do problema.

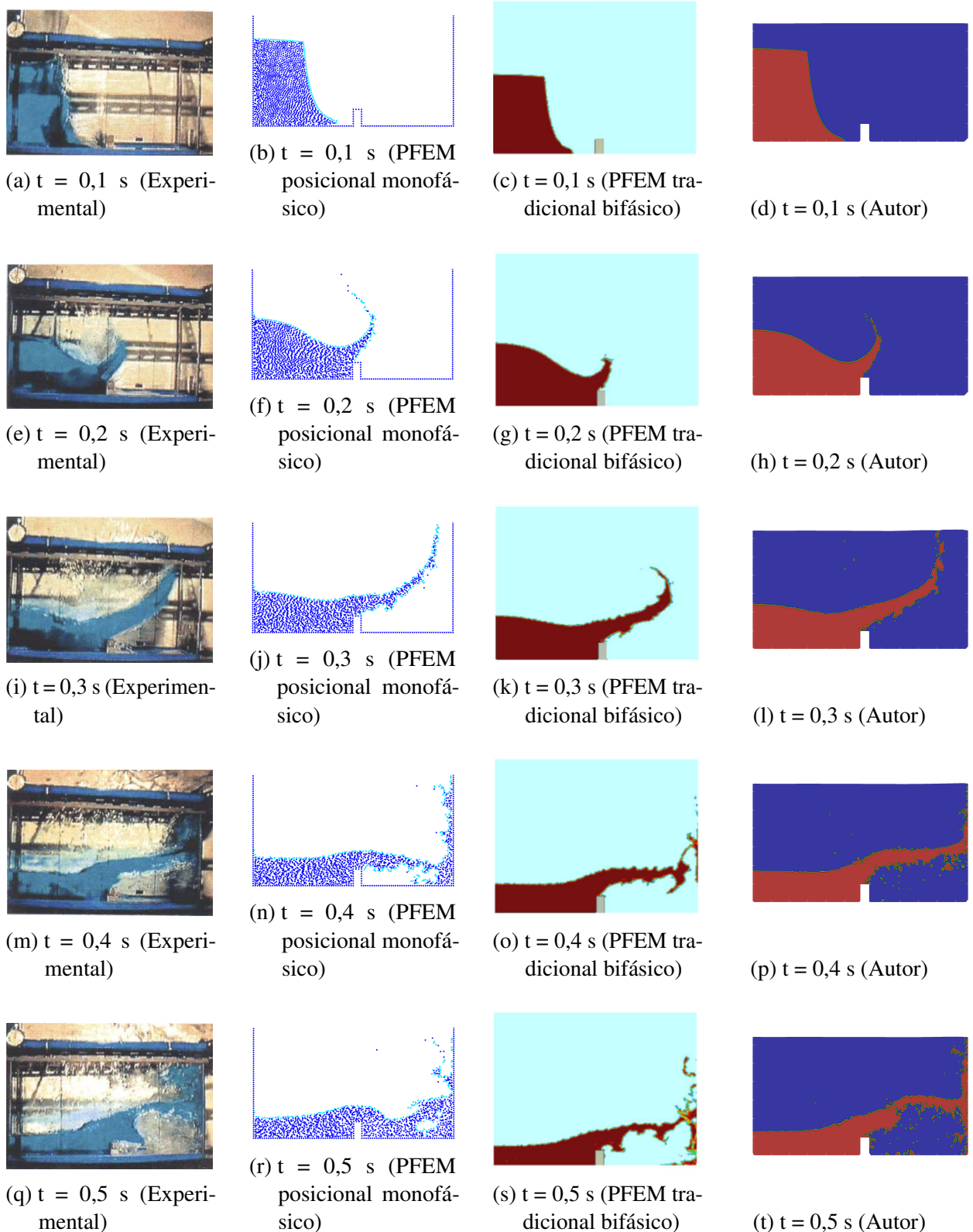
A Figura 78 denota a configuração da interface fluido-ar para os passos de tempo de análise do problema, ilustrando a captura dinâmica dessa interface ao longo do tempo. Esta primeira situação simula as paredes aderentes, conforme realizado com um modelo monofásico de superfície livre em Avancini (2023).

A Figura 79 apresenta a comparação dos campos de pressão para os passos de tempo de análise do problema, ilustrando a qualidade das pressões para o modelo bifásico implementado. Esta primeira situação simula as paredes aderentes, conforme realizado com um modelo monofásico de superfície livre em Avancini (2023).

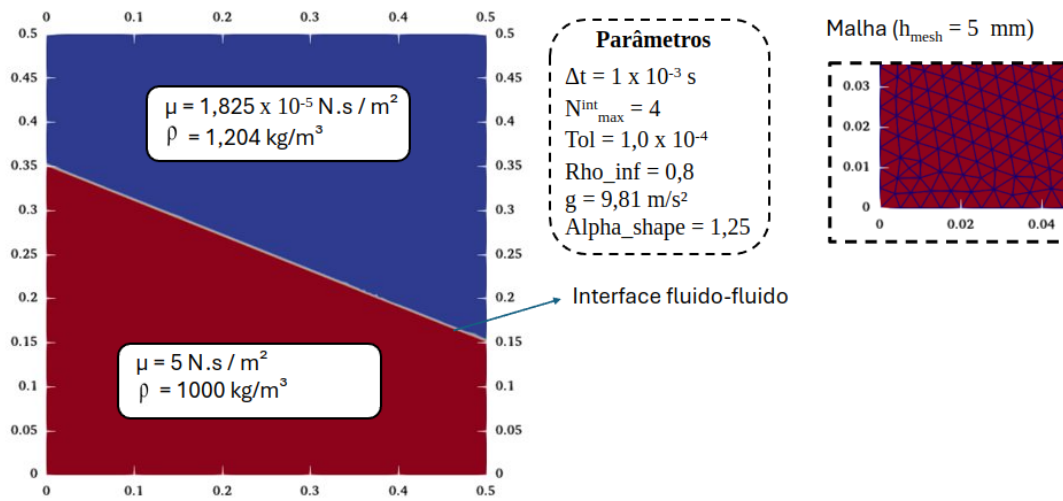
A Figura 80 ilustra a configuração da interface fluido-ar para o caso com paredes lisas. A condição de deslizamento representa dificuldades adicionais na modelagem do problema pelo PFEM, contudo com a técnica apresentada em 6.2 é possível superar essa limitação. Este segundo caso com paredes lisas é comparado com a simulação de Franci (2016), apresentando boa compatibilidade com os resultados da referência.

A Figura 81 apresenta a comparação dos campos de pressão para o caso com paredes lisas proposto por Franci (2016).

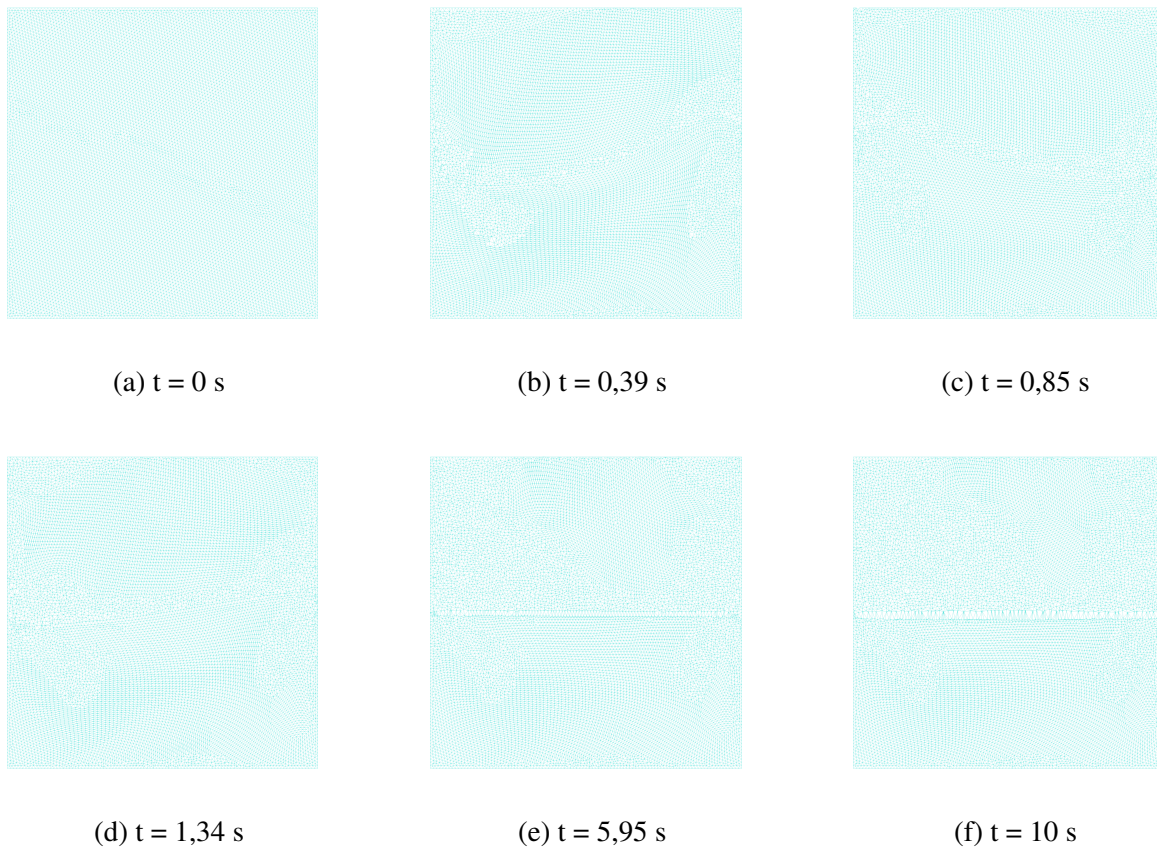
Figura 75 – Rompimento de barragem com impacto: captura da formação do bolsão de ar. As figuras denotam o experimental de Koshizuka *et al.* (1995), PFEM posicional monofásico de Avancini (2018), PFEM tradicional bifásico de Idelsohn *et al.* (2014) e abordagem proposta, respectivamente.



Fonte: Autoria Própria.

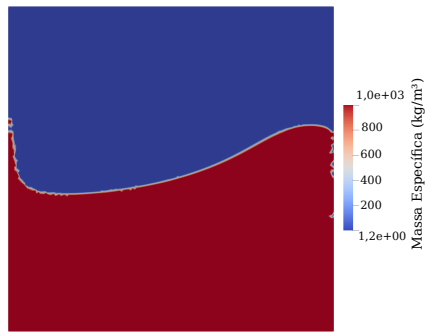
Figura 76 – *Sloshing* de um fluido viscoso: geometria e propriedades.

Fonte: Autoria Própria.

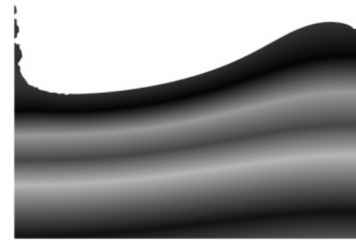
Figura 77 – *Sloshing* de um fluido viscoso: análise do remalhamento.

Fonte: Autoria Própria (2025).

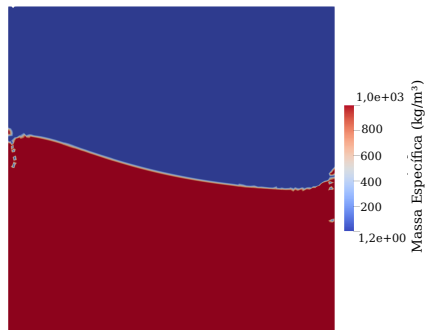
Figura 78 – *Sloshing* de um fluido viscoso: análise da interface fluido-ar (comparando com caso aderente de Avancini (2023)).



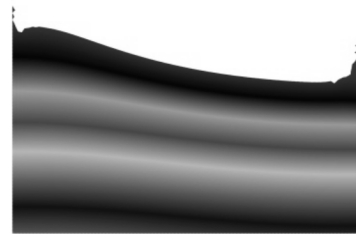
(a)  $t = 0,39$  s (Autor)



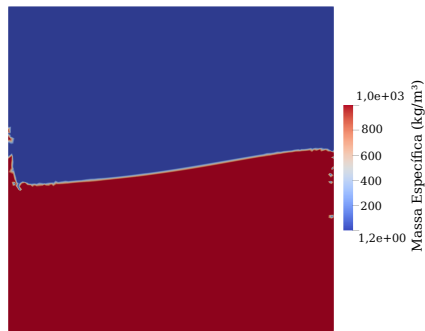
(b)  $t = 0,39$  s (Avancini, 2023)



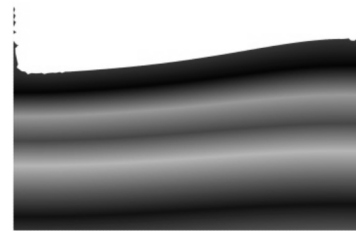
(c)  $t = 0,85$  s (Autor)



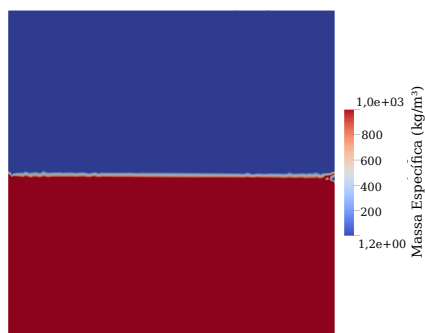
(d)  $t = 0,85$  s (Avancini, 2023)



(e)  $t = 1,34$  s (Autor)



(f)  $t = 1,34$  s (Avancini, 2023)



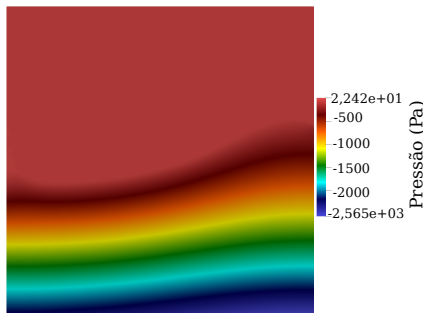
(g)  $t = 5,95$  s (Autor)



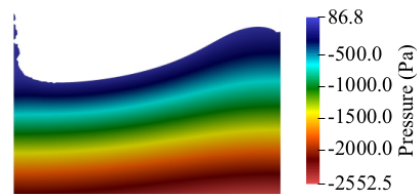
(h)  $t = 5,95$  s (Avancini, 2023)

Fonte: Autoria Própria.

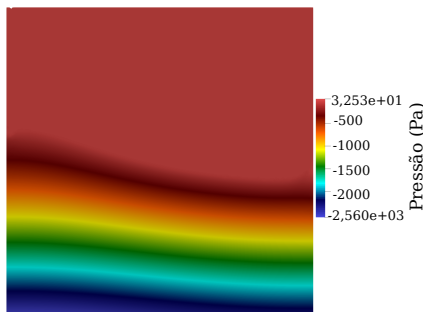
Figura 79 – *Sloshing* de um fluido viscoso: análise do campo de pressão (comparando com caso aderente de Avancini (2023)).



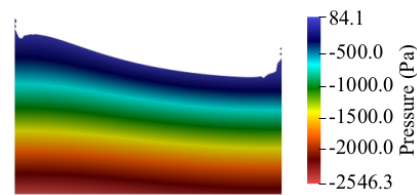
(a)  $t = 0,39$  s (Autor)



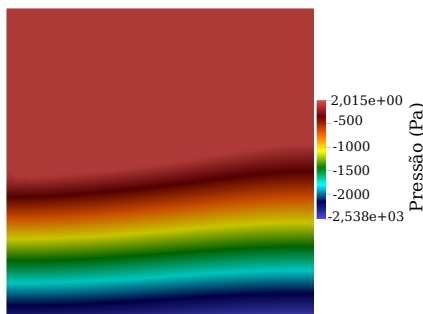
(b)  $t = 0,39$  s (Avancini, 2023)



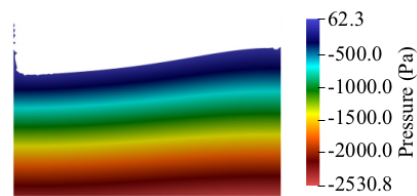
(c)  $t = 0,85$  s (Autor)



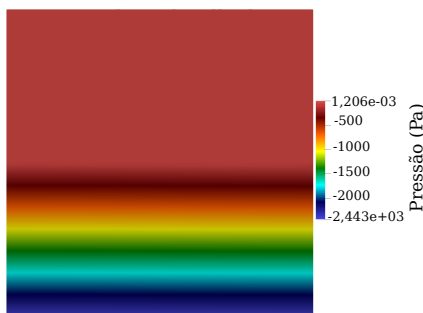
(d)  $t = 0,85$  s (Avancini, 2023)



(e)  $t = 1,34$  s (Autor)



(f)  $t = 1,34$  s (Avancini, 2023)



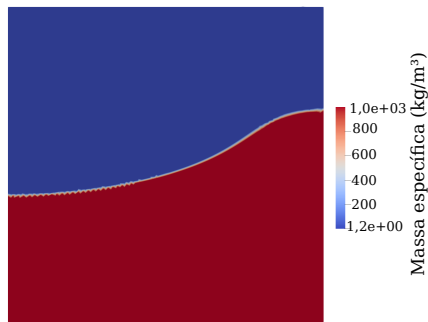
(g)  $t = 5,95$  s (Autor)



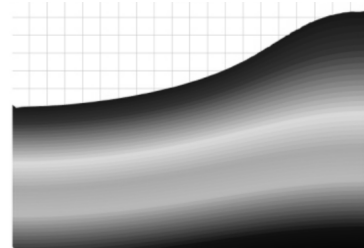
(h)  $t = 5,95$  s (Avancini, 2023)

Fonte: Autoria Própria.

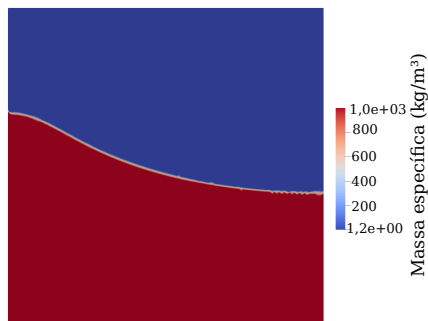
Figura 80 – *Sloshing* de um fluido viscoso: análise da interface fluido-ar (comparando com caso de paredes lisas de Franci (2016)).



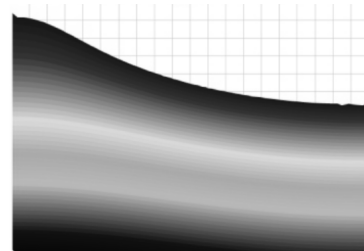
(a)  $t = 0,39$  s (Autor)



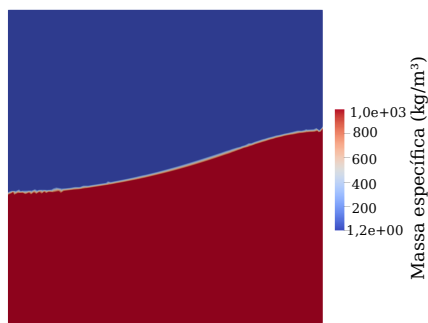
(b)  $t = 0,39$  s (Franci, 2016)



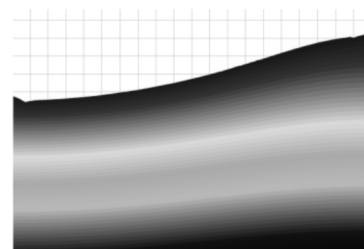
(c)  $t = 0,85$  s (Autor)



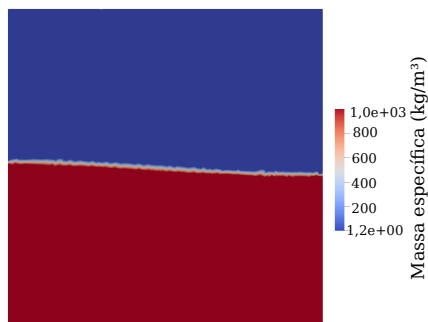
(d)  $t = 0,85$  s (Franci, 2016)



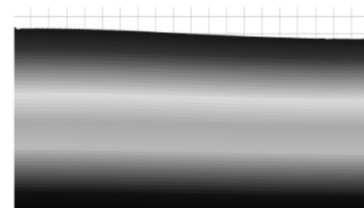
(e)  $t = 1,34$  s (Autor)



(f)  $t = 1,34$  s (Franci, 2016)



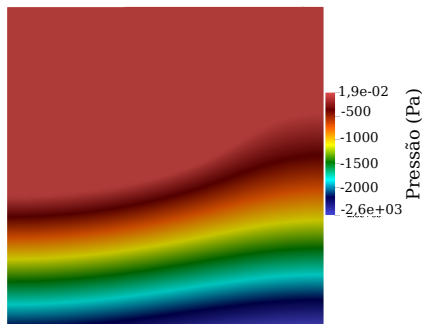
(g)  $t = 5,95$  s (Autor)



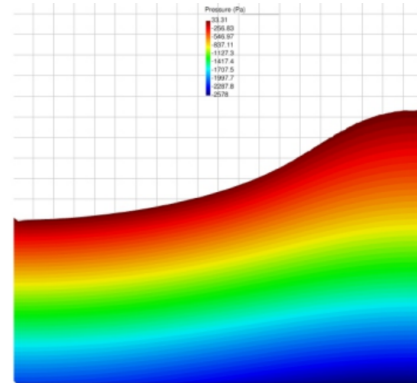
(h)  $t = 5,95$  s (Franci, 2016)

Fonte: Autoria Própria.

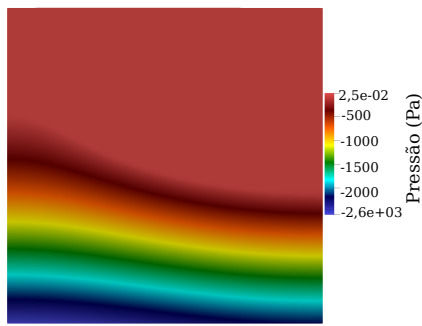
Figura 81 – *Sloshing* de um fluido viscoso: análise do campo de pressão (comparando com caso de paredes lisas de Franci (2016)).



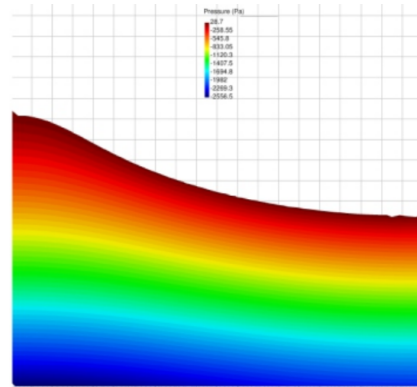
(a)  $t = 0,39$  s (Autor)



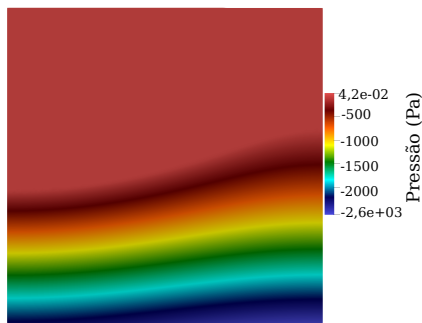
(b)  $t = 0,39$  s (Franci, 2016)



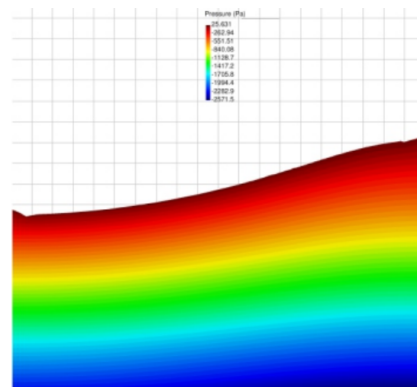
(c)  $t = 0,85$  s (Autor)



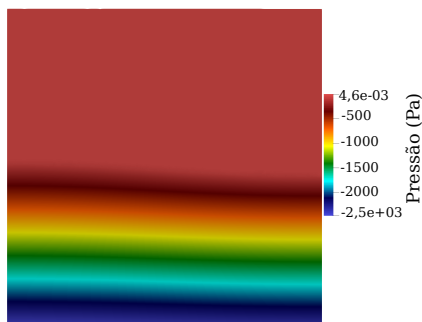
(d)  $t = 0,85$  s (Franci, 2016)



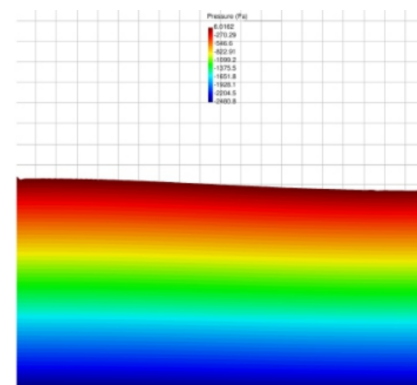
(e)  $t = 1,34$  s (Autor)



(f)  $t = 1,34$  s (Franci, 2016)



(g)  $t = 5,95$  s (Autor)



(h)  $t = 5,95$  s (Franci, 2016)

Fonte: Autoria Própria.

## Capítulo 8

# Interação Fluido-Estrutura

Os fenômenos de Interação Fluido-Estrutura (IFE) consistem em casos onde os efeitos do escoamento sobre a estrutura afetam o comportamento da estrutura, ao mesmo tempo em que o comportamento da estrutura afeta o escoamento, resultando em um problema com dois campos acoplados. O estudo numérico da IFE demanda a compatibilização das forças de superfície e do movimento com os dois meios, sólido e fluido, na interface fluido-estrutura. Isso é especialmente importante para o dimensionamento estrutural e para a análise de segurança em diversos projetos de engenharia, tais como a ação do vento em edifícios altos, estabilidade de aviões, impacto de ondas em estruturas civis ou navais, otimização de submarinos ou aeronaves.

A forma de solucionar o problema acoplado pode ser por métodos monolíticos ou particionados (Sanches, 2022). Na abordagem particionada, os sistemas de equações do fluido e do sólido são resolvidos separadamente, com o acoplamento sendo imposto por meio da transferência de condições de contorno entre o sólido e o fluido ao longo do processo de solução. Já no modelo de acoplamento monolítico, ambos os meios, sólido e líquido, são tratados como uma única entidade, resultando em um único sistema não linear. Os esquemas particionados ainda podem ser subdivididos em acoplamento particionado fraco e acoplamento particionado forte.

O acoplamento do problema de Interação Fluido-Estrutura pode-se desenvolver ainda dentro de uma descrição euleriana ou lagrangiana para a dinâmica dos fluidos. Como já mencionado em 1.1, a descrição euleriana é mais adequada para o estudo numérico de escoamentos em geral, implicando em uma malha fixa no espaço. Isso no entanto impede a simulação direta de problemas com contornos móveis, que é o caso da IFE. Uma alternativa robusta e eficiente, é empregar uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE), na qual a configuração de referência é considerada móvel porém com movimento independente do das partículas do escoamento.

Assim como na descrição euleriana, as formulações ALE são desenvolvidas tendo as velocidades nodais como incógnitas do problema, o que dificulta o acoplamento monolítico

com as estruturas descritas de forma lagrangiana, tendo deslocamentos ou posições como graus de liberdade. Ademais, o emprego direto da descrição ALE está limitado a casos em que as configurações do domínio fluido ao longo do tempo possam ser representada pela deformação da malha, demandando técnicas adicionais de remalhamento, computacionalmente custosas, para tratar de problemas em que haja mudanças topológicas.

Ao se empregar uma descrição lagrangiana para as equações de Navier-Stokes, dispensa-se a resolução de um sistema adicional para a malha, pois a malha acompanha a referência material, assim como na análise do sólido. Também evita-se a necessidade de estabilização dos termos convectivos no campo de velocidades, uma vez que eles estão ausentes na descrição lagrangiana (Avancini *et al.*, 2024; Moreira, 2021). No caso do emprego da formulação baseada em posição, o acoplamento monolítico com o sólido torna-se direto, uma vez que ambos os meios possuem as mesmas variáveis nodais.

No entanto, a descrição lagrangiana fica limitada a problemas com distorções finitas, sem vorticidade nem mudanças topológicas no domínio do fluido. Isso é totalmente contornado com o emprego do PFEM, como descrito no capítulo 6.

## 8.1 Acoplamento monolítico fluido-estrutura

A abordagem utilizada para o acoplamento foi introduzida no grupo de pesquisa em que esta pesquisa se insere, tomando vantagem da formulação unificada para o sólido e para o fluido, como pode ser vista em Avancini (2023) e Moreira (2021). A utilização das posições das partículas como variáveis principais do fluido, no lugar velocidades, torna o processo de acoplamento mais compacto e direto. Dessa forma, o algoritmo de acoplamento fica mais sucinto, bastando somar a contribuição nodal de ambos os domínios para as partículas de interface fluido/estrutura no sistema global.

Outra vantagem da formulação utilizada é pelo fato de ser lagrangiana e não necessitar de termos estabilizantes para o campo de velocidades/posições, como geralmente ocorrem nas formulações ALE ou eulerianas. Observa-se também que a formulação monolítica apresentada neste capítulo dispensa o uso de uma malha auxiliar para acoplar os sistemas fluido/sólido, reduzindo o número de graus de liberdade do sistema global.

### 8.1.1 Contato fluido-estrutura

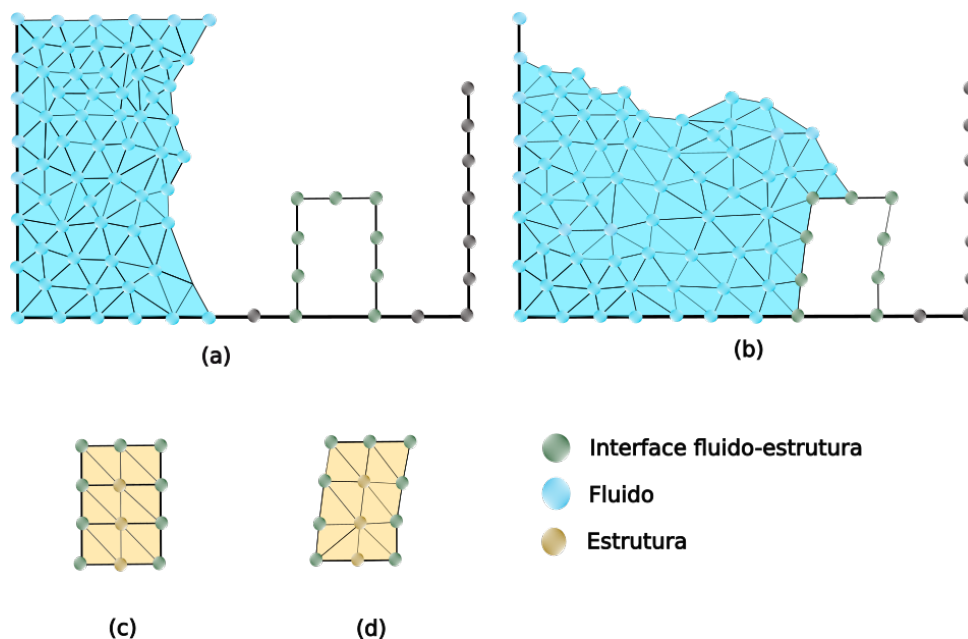
Em formulações particionadas da Interação Fluido-Estrutura, geralmente é necessário implementar alguma técnica para capturar a interface fluido-estrutura e então fazer a transmissão das propriedades do escoamento até a convergência. No caso desta formulação monolítica, há a vantagem de se poder simplesmente considerar a contribuição de cada domínio sobre cada nó da

interface, de tal maneira que a IFE é considerada diretamente na montagem da matriz tangente do sistema não linear. Isso é possível, pois tanto a descrição do fluido quanto a do sólido utilizam os mesmos parâmetros nodais (posições).

Nesse contexto, basta determinar os nós que formam a interface fluido-estrutura, o que é feito diretamente pela utilização do PFEM. A técnica consiste em adicionar partículas fantasmas aos nós do contorno do sólido com uma malha conforme a da estrutura (ver Figura 82 (a)), assim na interface fluido-estrutura tanto as partículas de fluido quanto de sólido possuem os mesmos graus de liberdade (Avancini, 2023), permitindo que a contribuição numérica na montagem do sistema global desses nós seja tanto do fluido quanto do sólido.

A Figura 82 (b) ilustra a detecção automática do contato fluido-estrutura pelo remalhamento do PFEM. Quando o fluido se aproxima do sólido o suficiente para que o método  $\alpha$ -shape mantenha o domínio fluido conectado às partículas fantasmas resulta na detecção automática do contato. Essa conexão no contato faz com que haja a contribuição de ambos os domínios nos nós da interface fluido-estrutura. A Figura (c) denota a malha da estrutura na configuração indeformada e a Figura (d) na configuração atual após determinado tempo. Nota-se, que na interface fluido-estrutura ocorre a conformidade de malha, permitindo trabalhar com os mesmos graus de liberdade tanto para o fluido quanto para a estrutura. Essa abordagem facilita o acoplamento monolítico, bastando realizar a contribuição nodal de ambos os domínios, assim a montagem da matriz do sistema pela simples contribuição de ambos domínios conduz à matriz tangente monolítica do sistema acoplado.

Figura 82 – Contato fluido-estrutura com PFEM: detecção das partículas de interface.



Fonte: Autoria Própria.

### 8.1.2 Solução do problema acoplado

A abordagem adotada conduz a uma formulação unificada para fluido e sólido, havendo diferenças apenas no modelo constitutivo de cada elemento, o que implica na adição da pressão como parâmetro variacional no meio fluido, e na configuração de referência, que é parcialmente atualizada no caso do fluido e permanece constante no caso do sólido, como pode ser observado comparando-se os Capítulos 5 e 6 com o Capítulo 3.

Isso faz com que, ao se considerar os nós do contorno do sólido como partículas fantasmas para o fluido, modelado segundo o PFEM, basta realizar a contribuição nodal de ambos os domínios para esses nós conduzindo de forma natural ao sistema fluido-estrutura monolítico.

Nesse sentido, é possível partir da definição da energia mecânica total do sistema acoplado calculada pela soma das parcelas de energias de ambos os domínios e dada por:

$$\Pi = \Pi_{ext} + \Pi_{int}^{fluido} + \Pi_{int}^{sólido} + \Pi_{cin} \quad (8.1)$$

onde  $\Pi_{ext}$  denota o potencial de forças externas;  $\Pi_{cin}$  denota a energia cinética do sistema;  $\Pi_{int}^{fluido}$  denota a energia de deformação interna do domínio de fluido, a qual inclui tanto a parcela viscosa quanto a volumétrica;  $\Pi_{int}^{sólido}$  refere-se à parcela de energia de deformação do sólido.

Aplicando uma abordagem variacional ao funcional de energia mecânica chega-se às equações governantes acopladas, e posteriormente à matriz tangente do problema dinâmico não linear monolítico, dada por:

$$\begin{bmatrix} H_{xx}^f & H_{xp}^f & 0 & H_{xx}^f & H_{xp}^f \\ H_{px}^f & H_{pp}^f & 0 & H_{px}^f & H_{pp}^f \\ 0 & 0 & H_{xx}^s & H_{xx}^s & 0 \\ H_{xx}^f & H_{xp}^f & H_{xx}^s & H_{xx}^f + H_{xx}^s & H_{xp}^f \\ H_{px}^f & H_{pp}^f & 0 & H_{px}^f & H_{pp}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_f \\ \Delta p_f \\ \Delta x_s \\ \Delta x_{fs} \\ \Delta p_{fs} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{mf} \\ r_c^f \\ r_m^s \\ r_m^f + r_m^s \\ r_c^f \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

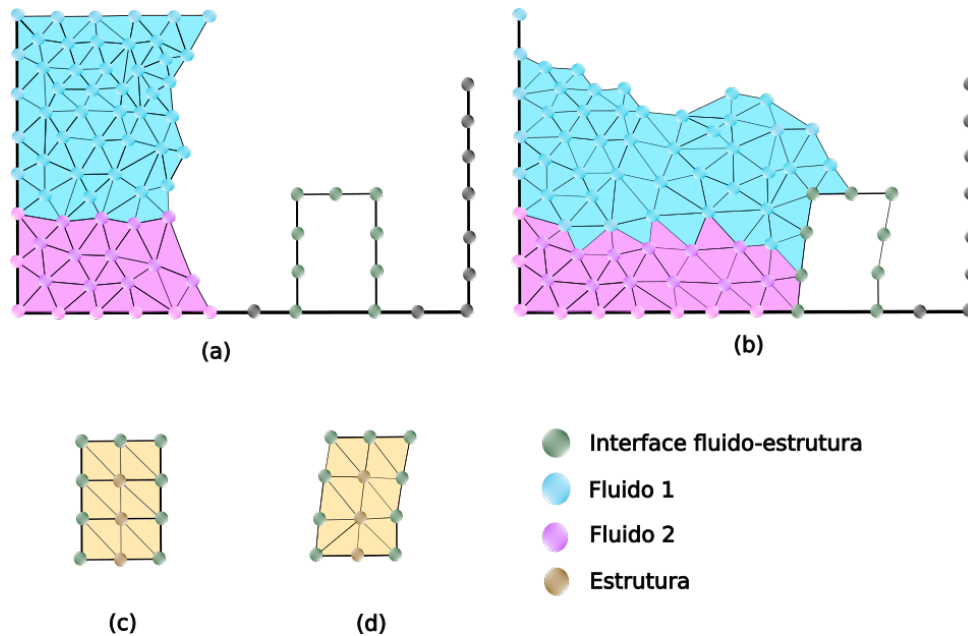
Os índices  $f$  e  $s$ , quando sobrescritos, denotam respectivamente contribuição do fluido ou do sólido, já os subscritos  $f$ ,  $s$  e  $fs$  denotam valores das partículas (nós) do fluido, do sólido, ou da interface fluido-sólido, respectivamente;  $r_m$  e  $r_c$  são os resíduos da equação da conservação da quantidade de movimento e da condição de incompressibilidade; as submatrizes  $H^f$  e  $H^s$  indicam uma contribuição advinda de um elemento de fluido ou de sólido; e por fim, os subscritos  $x$  e  $p$  denotam os graus de liberdade envolvidos no operador (posição e pressão).

## 8.2 Escoamentos multifásicos na IFE

De forma análoga ao problema de contato do escoamento multifásico com uma parede rígida, aqui também é necessário modificar a atribuição de materiais às partículas fantasmas em

função do fluido mais próximo. Ou seja, as partículas fantasmas da interface fluido-estrutura têm seus materiais definidos de forma dinâmica, em função do fluido mais próximo, conforme ilustra a Figura 83.

Figura 83 – Interação Fluido-Estrutura com escoamentos multifásicos no PFEM.



Fonte: Autoria Própria.

A Figura 83 ilustra um caso em que o contato fluido-estrutura é possível de ser realizado com a técnica tradicional de remalhamento do PFEM monofásico, bastando realizar a definição dinâmica do material das partículas fantasmas em função do fluido mais próximo. Contudo, no caso de domínios fechados, como na consideração da presença do ar, a técnica de contato tradicional do PFEM fica prejudicada, pois o ar já está preenchendo todo o domínio, consequentemente o  $\alpha$ -shape não auxilia mais na detecção do contato fluido-estrutura. Para tratar isso, foram implementadas técnicas adicionais de monitoramento de partículas próximas das paredes, a fim de generalizar o contato fluido-estrutura do PFEM para escoamentos multifásicos gerais.

Esse monitoramento consiste em acompanhar a distância das partículas até a parede (flexível ou rígida) e, quando a distância for menor que um valor limite, a partícula é realocada na vizinhança e seus valores são interpolados a partir das partículas vizinhas. A realocação ocorre de forma a preservar a interface fluido-fluido, ou seja, no caso do contato fluido-estrutura ser parte de uma interface fluido-fluido, a partícula é realocada no contorno da interface fluido-fluido, de maneira a não alterar a topologia do domínio multifásico. Esse procedimento pode gerar elementos de áreas pequenas no contato fluido-estrutura com múltiplos fluidos, nesse contexto, também realiza-se o monitoramento do jacobiano de cada elemento da malha, promovendo a realocação de partículas pertencentes a elementos com área ou volume pequeno, de forma a evitar a formação de elementos degenerados. Aplicando-se tais procedimentos, pode-se simular a IFE com escoamentos multifásicos gerais, incluindo contato fluido-estrutura em domínios

fechado (como na presença do ar). Os demais procedimentos empregados para escoamentos multifásicos, definidos no Capítulo 7, permanecem inalterados.

### 8.3 Implementação computacional

Esta seção detalha os principais aspectos do tratamento computacional de escoamentos multifásicos no contexto da Interação Fluido-Estrutura por meio do emprego do PFEM. A abordagem proposta é original e independente, na forma apresentada para a IFE multifásica. Além dos aspectos introduzidos na seção 7.3 para o tratamento de mudanças topológicas no contexto com múltiplos fluidos, especial atenção é necessária para o tratamento do contato fluido-estrutura no âmbito de escoamentos multifásicos.

O pseudocódigo do algoritmo 13 apresenta a estrutura geral do remalhamento do PFEM para a IFE com escoamentos multifásicos. Onde para cada passo de tempo, o algoritmo de remalhamento é executado, onde a malha anterior é apagada e uma nova malha é gerada, com refinamento adaptativo, conforme a técnica de controle de qualidade. Em sequência, é realizada uma busca para caracterização da vizinhança nodal, informação necessária no controle de qualidade multifásico da malha. O mapeamento das partículas de bolha na nova malha também é realizado, seguindo com a aplicação dinâmica do material às partículas fantasmas, que definem os contornos do sólido na Interação Fluido-Estrutura. Com a malha atualizada, o processo de solução do sistema não linear é executado pelo método de Newton-Raphson.

---

#### Algoritmo 13: Estrutura geral do remalhamento multifásico na IFE

---

```

1 para timeStep  $\leftarrow$  0 até numberOfSteps - 1 faça
2   Executar fluid_ $\rightarrow$ executeMesh(ver algoritmo 14);
3   Executar fluid_ $\rightarrow$ nodalNeighborSearch();
4   início
5     Limpar informações de vizinhança da malha anterior;
6     Procurar elementos vizinhos para cada nó;
7     Adicionar nós vizinhos à lista de vizinhança;
8   fim
9   Executar fluid_ $\rightarrow$ bubblesSearch(ver algoritmo 16);
10  Aplicar fluid_ $\rightarrow$ applyMaterialGhostContour(ver algoritmo 17);
11  para iteration  $\leftarrow$  0 até maxNonlinearIterations - 1 faça
12    Aplicar condições de Neumann;
13    Montar sistema linear monolítico, conforme seção 8.1.2;
14    Aplicar condições de Dirichlet;
15    Resolver sistema linear;
16    Atualizar variáveis do sistema;
17    Calcular variáveis atuais;
18  fim
19 fim

```

---

O algoritmo 14 está inserido como uma etapa do pseudocódigo 13 e apresenta o detalhamento dos métodos empregados para reconstrução da malha a cada passo de tempo. Essa função se inicia pela limpeza dos containers de elementos e nós da malha do último passo de tempo solucionado, seguindo com a execução de processos de pré-remalhamento, onde são realizadas as análises de controle de qualidade da malha, como a remoção de nós e a geração de novos nós para cada material. Em sequência, é realizada a tecelagem de Delaunay da malha, onde no caso bidimensional são gerados triângulos pelo *Triangle* e no caso tridimensional são gerados tetraedros pelo *Tetgen*. Por conseguinte, são executados os processos pós-remalhamento, onde são selecionados e criados os elementos da nova malha no contexto do critério  $\alpha$ -*shape* para a definição dos contornos do fluido. Além disso, são construídas as superfícies livres e as interfaces fluido-fluido. Por fim, as informações da nova malha são transferidas para as entidades geométricas.

---

**Algoritmo 14:** Execução do remalhamento
 

---

```

1 executeMesh();
2 início
3   Limpar containers de elementos e nós nas entidades geométricas;
4   remesh_ → execute(nodes_, elements_, parameters_);
5   início
6     Executar processos pré-remalhamento::
7     início
8       info_.initialize();
9       setMeshInfo(nodes, elements, param);
10      removeMeshNodes(nodes, elements, param), conforme seção 7.2;
11      generateNewNodesForEachMaterial(nodes, elements, param), conforme
        seção 7.2;
12     fim
13     Gerar tecelagem da malha, conforme seção 6.1.1;
14     Executar processos pós-remalhamento::
15     início
16       selectMeshElements(nodes, elements, param), conforme critério  $\alpha$ shape
        apresentado na seção 6.1.2;
17       generateNewElements(nodes, elements, param);
18       buildFreeSurface(nodes, elements, param), conforme seção 6.1.2;
19       buildInterfaceFluidFluid, conforme algoritmo 15;
20       setMeshInfo(nodes, elements, param);
21     fim
22   fim
23   Transferir informações para as entidades geométricas;
24 fim

```

---

O algoritmo 15 está inserido como uma etapa do pseudocódigo 14 e destaca a construção da interface fluido-fluido para cada remalhamento. O processo de inicia pela atualização das informações de interface dos nós e elementos, onde armazena-se a informação da malha anterior

(se o nó ou elemento era interface fluido-fluido no passo de tempo anterior) e apaga-se a informação do passo atual. Armazena-se também a informação do material mais frequente por elemento da interface e para os elementos que possuem mais de um material, define-se a interface fluido-fluido para o elemento e seus nós.

---

**Algoritmo 15:** Construção da interface fluido-fluido
 

---

```

1  Armazenar interface fluido-fluido anterior;
2  Reset interface fluido-fluido atual;
3  Calcular numberOfMaterialsByElement;
4  para cada elemento em elements faça
5      Obter nós do elemento;
6      Inicializar;;
7      início
8          numNodesInterfaceFF  $\leftarrow$  0;
9          mapaContagemMateriais  $\leftarrow$  novo mapa vazio;
10     fim
11     para cada nó no elemento faça
12         Material  $\leftarrow$  obter material do nó;
13         Atualizar contagem no mapaContagemMateriais;
14     fim
15     numMatByElem  $\leftarrow$  tamanho do mapaContagemMateriais;
16     Definir numberOfMaterialsByElement  $\leftarrow$  numMatByElem;
17     Encontrar material mais frequente;;
18     início
19         materialFrequente  $\leftarrow$  nulo;
20         contagemMax  $\leftarrow$  0;
21         para cada par (material, contagem) em mapaContagemMateriais faça
22             se contagem > contagemMax então
23                 atualizar materialFrequente e contagemMax;
24             fim
25         fim
26     fim
27     Definir mostFrequentMaterial  $\leftarrow$  materialFrequente;
28     se numMatByElem > 1 então
29         Definir interfaceFF  $\leftarrow$  verdadeiro para o elemento;
30         para cada nó no elemento faça
31             Definir interfaceFF  $\leftarrow$  verdadeiro para o nó;
32         fim
33     fim
34 fim

```

---

O algoritmo 16 está inserido como uma etapa do pseudocódigo 13 e apresenta o processo de mapeamento de bolhas na malha do PFEM. O algoritmo inicia pela limpeza da informação de bolha de cada nó e, em seguida, para cada nó da malha, verifica-se o material da vizinhança, por fim define-se a partícula (nó) como bolha se a partícula não tiver vizinhos com o mesmo material. Nota-se que por utilizar a informação de vizinhança (*nodalNeighborSearch()* do algoritmo 13),

o algoritmo 16 deve ser alocado após de *executeMesh()* e *nodalNeighborSearch()*, não sendo eficiente ser alocado junto de *buildInterfaceFluidFluid()*.

---

**Algoritmo 16:** Busca de bolhas na malha

---

```

1 para cada nó em nodes_ faça
2   | Definir propriedade bubble ← falso;
3 fim
4 para cada nó em nodes_ faça
5   | mat1 ← node→getMaterial();
6   | vizinhos ← node→getNeighborNodes();
7   | contagemVizinhosMaterial ← 0;
8   | se mat1 ≠ nulo então
9     |   para cada vizinho em vizinhos faça
10    |     | mat2 ← vizinho→getMaterial();
11    |     | se mat2 ≠ nulo e mat1 == mat2 então
12    |     |   | contagemVizinhosMaterial ← contagemVizinhosMaterial + 1;
13    |     |   fim
14    |     fim
15   | fim
16   | se contagemVizinhosMaterial = 0 então
17   |   | node→setBubble(true);
18   | fim
19 fim

```

---

O algoritmo 17 está inserido no contexto do pseudocódigo 13 e apresenta o processo de aplicação do material às partículas fantasmas, as quais são as partículas que definem o contorno da interface fluido-estrutura. O algoritmo inicia pela iteração sobre cada nó da malha, verificando se o nó é restrito (Dirichlet), se é interface fluido-estrutura ou se é Neumann fixo (aplicação de força de superfície espacialmente fixa). Em caso positivo, o algoritmo itera sobre os vizinhos do nó, buscando o material mais próximo em um raio de tolerância de 1,2 vezes o tamanho característico da malha ( $h_{mesh}$ ) e aplica o material da partícula vizinha ao nó fantasmas, caso o nó vizinho não seja restrito ou de interface fluido-estrutura. Essa verificação garante que não ocorra a propagação do material de partículas fantasmas, pois o sentido de propagação do material é sempre do fluido para a partícula fantasma e não entre elas.

**Algoritmo 17:** Aplicação de material às partículas fantasmas

---

```

1 para cada nó em nodes_ faça
2   se nó é restrito ou interface fluido-estrutura ou Neumann fixo então
3     vizinhos  $\leftarrow$  nó $\rightarrow$ getNeighborNodes();
4     para cada node2 em vizinhos faça
5       mat2  $\leftarrow$  node2 $\rightarrow$ getMaterial();
6       toleranceDistance  $\leftarrow$   $1.2 \times h_{mesh}$ ;
7       distanceNode1Node2  $\leftarrow$  calcular distância quadrática entre nó e node2;
8       se distanceNode1Node2 < toleranceDistance e node2 não é restrito e não é
          interface fluido-estrutura então
9         nó $\rightarrow$ setMaterial(mat2);
10        sair do loop interno;
11      fim
12    fim
13  fim
14 fim

```

---

## 8.4 Exemplos de verificação

### 8.4.1 Reservatório com parede flexível: bifásico e pequenos deslocamentos

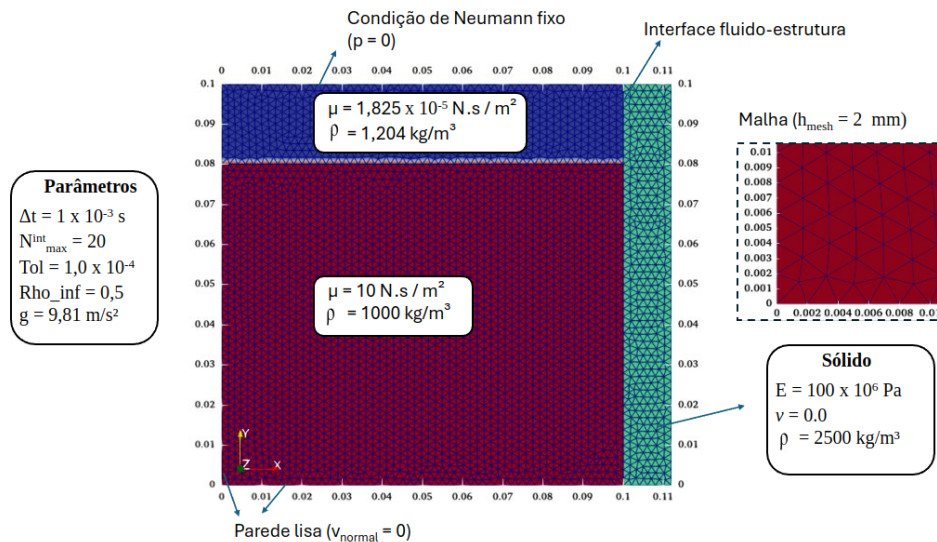
Este exemplo visa simular a Interação Fluido-Estrutura com um escoamento bifásico. A complexidade deste exemplo reside tanto na simulação da interface fluido-fluido quanto da interface fluido-estrutura. O escoamento bifásico é modelado com o PFEM, enquanto a viga elástica é modelada com o MEF, o acoplamento fluido-estrutura utiliza uma abordagem monolítica e a interface fluido-fluido é naturalmente capturada pela abordagem desenvolvida do PFEM multifásico. Além do tratamento das interfaces, neste exemplo também é considerado um contorno espacialmente fixo com aplicação de condição de Neumann nula; bem como de deslizamento na parede esquerda rígida e no fundo do reservatório.

O problema consiste em um reservatório de dimensões  $[L \times L]$ , sendo  $L = 0,1$  m, conforme apresentado no esquema da Figura 84. A parede direita do reservatório é flexível, possuindo largura de  $0,012$  m e altura de  $0,1$  m; bem como um módulo de elasticidade de  $100$  MPa, um coeficiente de Poisson nulo e massa específica de  $2500$   $\text{kg m}^{-3}$ . A configuração inicial apresenta um fluido viscoso em repouso na parte inferior, com sua face superior livre de forças de superfície, mas espacialmente fixa, conforme metodologia da seção 6.2.2. O restante do reservatório é preenchido por ar, conforme detalhado na Figura 84. O fluido viscoso é simulado com as propriedades físicas  $\mu = 10$   $\text{N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1000$   $\text{kg m}^{-3}$ , enquanto para o ar considera-se  $\mu = 0,00001825$   $\text{N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1,204$   $\text{kg m}^{-3}$ .

Os demais parâmetros do problema incluem aceleração da gravidade  $g = 9,81$   $\text{m s}^{-2}$  e para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho

característico de 0,002 m (ver malha na Figura 84). O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,001$  s, o raio espectral é  $\rho_\infty = 0,5$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 20$  e a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-4}$ .

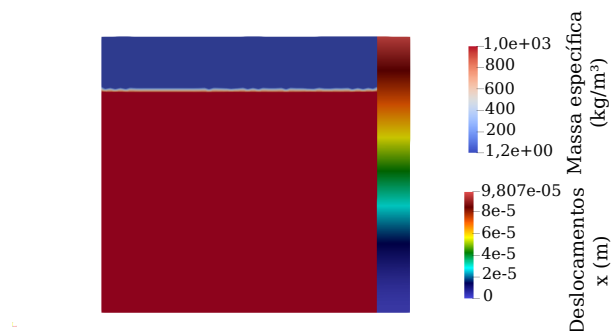
Figura 84 – Reservatório bifásico com parede flexível em pequenos deslocamentos: modelo numérico com geometria, condições de contorno e malha.



Fonte: Autoria Própria.

A rigidez considerada para a parede flexível faz com que o problema rapidamente alcance a configuração de equilíbrio estático. A Figura 85 apresenta o campo de deslocamentos horizontais  $u_x$  para o sólido e o campo de massa específica  $\rho$  para o fluido, ambos no instante de tempo  $t = 1$  s. O deslocamento da face superior da viga é de  $9,8 \cdot 10^{-5}$  m, representando 99% de compatibilidade com o resultado analítico linear da configuração estacionária, conforme apresentado em Avancini (2023).

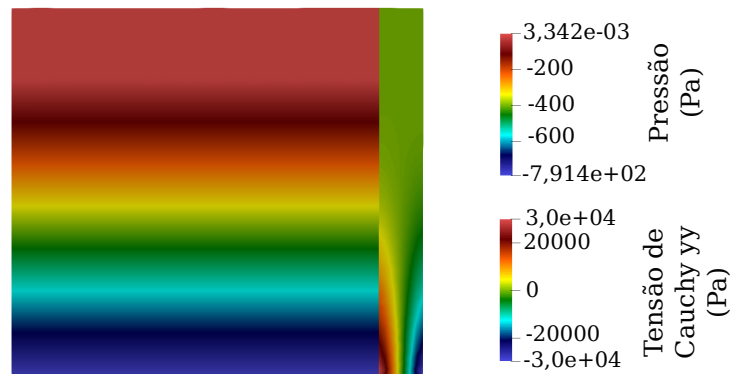
Figura 85 – Reservatório bifásico com parede flexível em pequenos deslocamentos: campo de deslocamentos horizontais no sólido  $u_x$ .



Fonte: Autoria Própria.

A Figura 86 mostra a distribuição de pressão no fluido bem como a componente vertical da tensão normal de Cauchy na estrutura para o instante  $t = 1,0$  s.

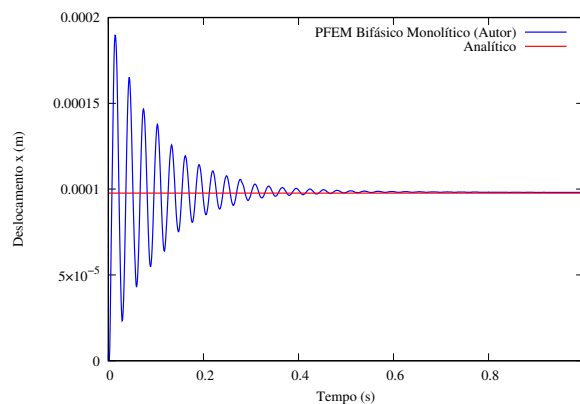
Figura 86 – Reservatório bifásico com parede flexível em pequenos deslocamentos: campo de pressão no fluido e campo de tensão na estrutura para o instante  $t = 1,0$  s.



Fonte: Autoria Própria.

O gráfico da Figura 87 apresenta a comparação do deslocamento da face superior da parede flexível ao longo do tempo com a resposta estática analítica linear. Nota-se que a configuração estacionária atingida apresenta um erro menor que 1% em relação à previsão analítica.

Figura 87 – Reservatório bifásico com parede flexível em pequenos deslocamentos: Deslocamento horizontal da face superior da viga, no ponto central, ao longo do tempo.



Fonte: Autoria Própria.

#### 8.4.2 Reservatório com parede flexível: bifásico com formação de onda

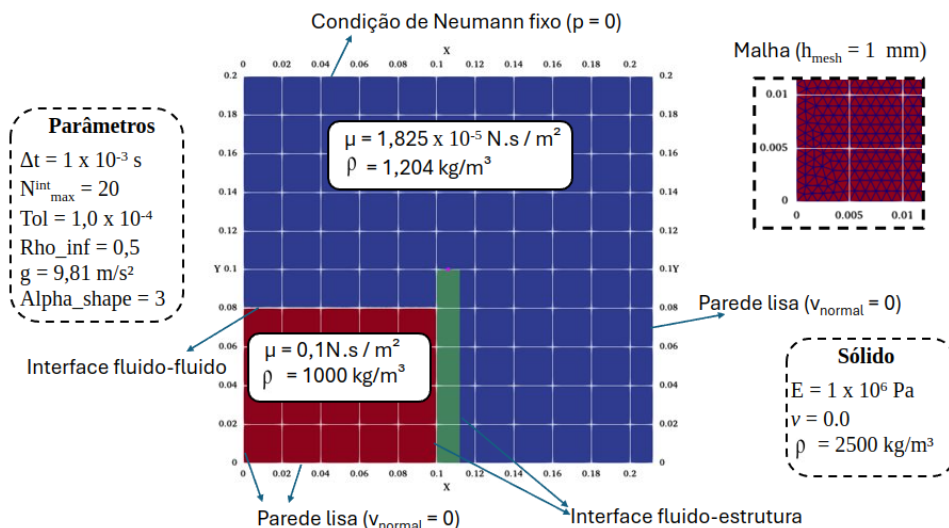
Este exemplo é uma extensão do problema anterior onde a parede é mais flexível, provocando maiores deslocamentos que implicam na formação de ondas no líquido. Também considera-se uma porção maior do volume de ar no entorno do líquido e da barragem, permitindo interações mais complexas. Este exemplo também busca simular a formação de ondas em um escoamento bifásico, considerando a interação líquido-estrutura-ar. Tanto a interface fluido-fluido quanto a de fluido-estrutura sofrem grandes deslocamentos ao longo do tempo, nesse sentido este exemplo ilustra a capacidade do modelo de capturar fenômenos complexos de IFE e de interação fluido-fluido. Além disso, a condição de paredes lisas pode resultar em perda da geometria para

formulações tradicionais do PFEM, assim este exemplo também serve para verificar as técnicas implementadas para deslizamento no PFEM (ver seção 6.2.3) e de contorno fixo com condição de Neumann (ver seção 6.2.2).

O problema consiste em um reservatório de dimensões  $[L \times L]$ , sendo  $L = 0,2$  m, conforme apresentado no esquema da Figura 88. A estrutura no interior do reservatório é flexível, possuindo largura de  $0,012$  m e altura de  $0,1$  m; bem como um módulo de elasticidade de  $1$  MPa, um coeficiente de Poisson nulo e massa específica de  $2500$   $\text{kg m}^{-3}$ . A configuração inicial apresenta um fluido em repouso na parte inferior, com sua face superior livre de forças de superfície, mas espacialmente fixa, conforme metodologia da seção 6.2.2. O restante do reservatório é preenchido por ar, conforme detalhado na Figura 88. O líquido é simulado com as propriedades físicas  $\mu = 0,1$   $\text{N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1000$   $\text{kg m}^{-3}$ , enquanto para o ar considera-se  $\mu = 0,00001825$   $\text{N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1,204$   $\text{kg m}^{-3}$ .

Os demais parâmetros do problema incluem aceleração da gravidade  $g = 9,81$   $\text{m s}^{-2}$  e para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho característico de  $0,001$  m (ver malha na Figura 88). O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,001$  s, o raio espectral é  $\rho_\infty = 0,5$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 20$  e a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-4}$ .

Figura 88 – Reservatório bifásico flexível com formação de onda: modelo numérico com geometria, condições de contorno e malha.

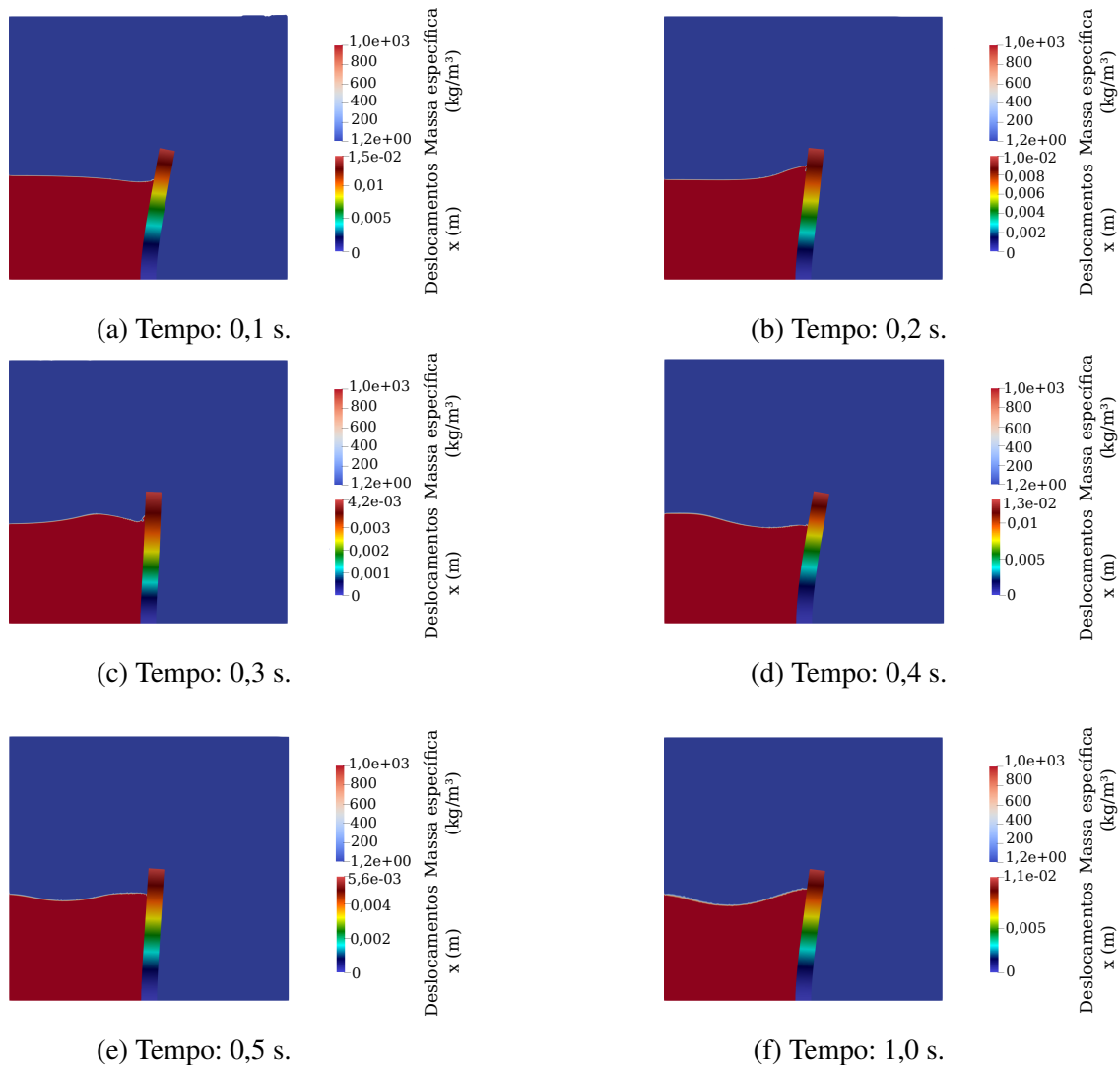


Fonte: Autoria Própria.

A Figura 89 apresenta a distribuição de massa específica do fluido e de deslocamentos sobre a estrutura, permitindo identificar o desenvolvimento das interfaces fluido-fluido e fluido-estrutura ao longo do tempo. Nota-se que os valores são apresentados para os passos de tempo  $t = 0, 1$  s;  $t = 0, 2$  s;  $t = 0, 3$  s;  $t = 0, 4$  s;  $t = 0, 5$  s; e  $t = 1, 0$  s.

A Figura 90 apresenta a distribuição de pressão nos fluidos e a componente vertical de tensão de Cauchy no sólido elástico, ambas para os instantes  $t = 0, 1$  s;  $t = 0, 2$  s;  $t = 0, 3$  s;

Figura 89 – Reservatório bifásico flexível com formação de onda: análise das interfaces fluido-fluido e fluido-estrutura ao longo do tempo.



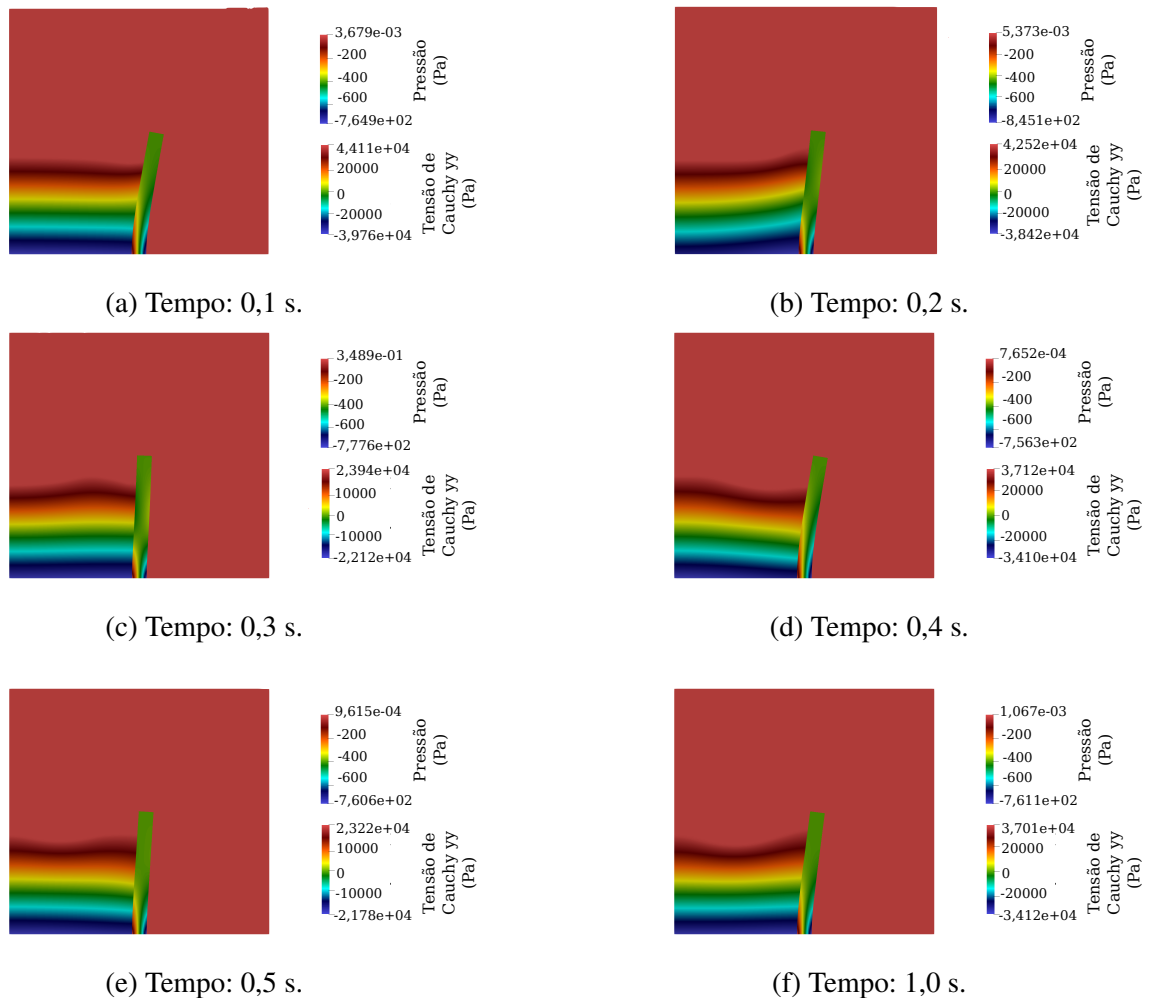
Fonte: Autoria Própria.

$t = 0,4$  s;  $t = 0,5$  s; e  $t = 1,0$  s. É possível notar resultados qualitativamente consistentes com o que se espera para este problema.

### 8.4.3 Ruptura de barragem sobre anteparo elástico considerando interação água-ar

Proposto por Walhorn *et al.* (2005), este problema consiste em uma coluna de água que, no início da análise, colapsa devido à remoção instantânea da comporta que a mantém. O fluido, inicialmente em repouso, começa então a escoar sob ação da gravidade e atinge um anteparo elástico. Devido ao impacto e à formação de ondas, a estrutura começa a oscilar e interagir com o escoamento. Os domínios de água e do ar sofrem grandes mudanças topológicas ao longo da

Figura 90 – Reservatório bifásico flexível com formação de onda: distribuição de pressão no fluido e componente vertical de tensão normal na estrutura.



Fonte: Autoria Própria.

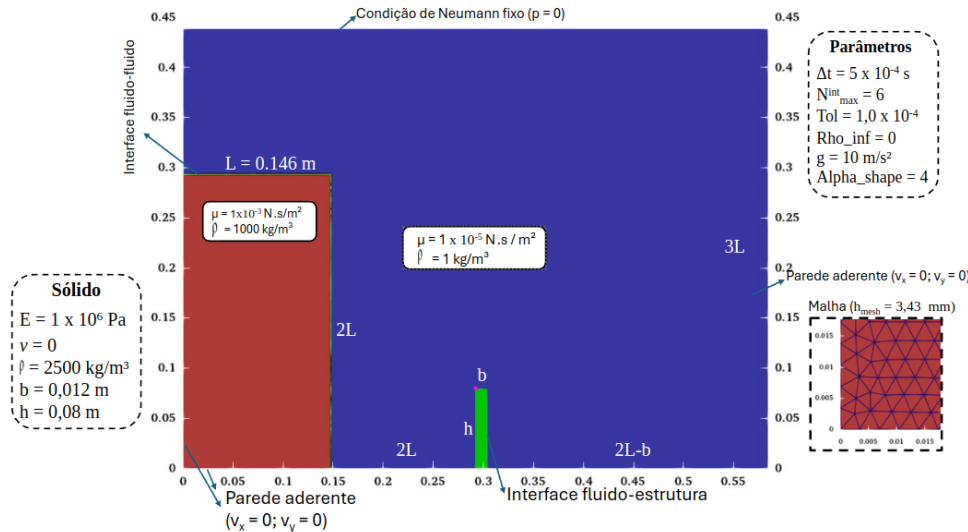
análise, incluindo formação de bolsões de ar. A geometria inicial se encontra detalhada na Figura 91, onde são apresentados também todos os dados necessários para a análise.

O problema consiste em um domínio de dimensões  $[4L \times 3L]$ , sendo  $L = 0,146$  m, conforme apresentado no esquema da Figura 91. A estrutura no interior do domínio é flexível, possuindo largura de  $0,012$  m e altura de  $0,08$  m; bem como um módulo de elasticidade de  $1$  MPa, um coeficiente de Poisson nulo e massa específica de  $2500$   $\text{kg m}^{-3}$ . A face superior do domínio está livre de forças de superfície, mas espacialmente fixa, conforme metodologia da seção 6.2.2. A barragem de água é simulada com as propriedades físicas  $\mu = 0,001$   $\text{N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1000$   $\text{kg m}^{-3}$ , enquanto para o ar considera-se  $\mu = 0,00001$   $\text{N s m}^{-2}$  e  $\rho = 1,0$   $\text{kg m}^{-3}$ , seguindo os valores adotados por Walhorn *et al.* (2005).

Os demais parâmetros do problema incluem aceleração da gravidade  $g = 9,81$   $\text{m s}^{-2}$  e para a malha utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação linear com tamanho

característico de 0,003 43 m (ver malha na Figura 91). O passo de tempo adotado é  $\Delta t = 0,0005$  s, o raio espectral é  $\rho_\infty = 0,0$ , o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson é  $N_{max}^{it} = 6$  e a tolerância do sistema não linear é  $tol = 1,0 \cdot 10^{-4}$ .

Figura 91 – IFE bifásica com mudança topológica: modelo numérico com geometria, condições de contorno e malha.



Fonte: Autoria Própria.

Destaca-se que a diferença de massa específica dos fluidos é considerável, podendo representar um desafio para a convergência em outros métodos baseados em partículas. Apesar disso, a formulação multifásica proposta é capaz de capturar tais efeitos, permitindo o desprendimento de partículas de um fluido para o outro, a formação de bolhas e encontro de interfaces fluido-fluido.

Ressalta-se que o contato fluido-parede do PFEM fica prejudicado computacionalmente com uma abordagem multifásica que simula o ar, pois na abordagem monofásica ocorre uma conexão antecipada da interface fluido-parede, o que não ocorre com a presença de ar. Para contornar esse problema, é necessário utilizar passos de tempo menores para evitar a inversão de elementos no contato fluido-parede ou utilizar um remalhamento mais grosseiro na interface fluido-parede a fim de recuperar a forma original do contato monofásico. No presente trabalho, ambas soluções foram testadas, sendo a segunda a mais eficiente, permitindo a simulação do problema em um tempo bastante menor e sem prejudicar a qualidade dos resultados. A primeira forma apresentou problemas de convergência e instabilidade numérica para passos de tempo menores que  $10^{-5}$  s. Para trabalhos futuros sugere-se implementar uma técnica de contato baseada em multiplicadores de Lagrange para a interface fluido-parede no contexto de simulações fluido-ar com PFEM, isso pode permitir passos de tempo maiores sem afetar na qualidade da malha, apesar de representar um custo computacional maior.

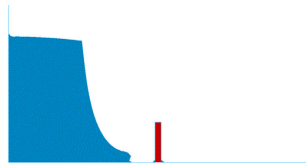
A Figura 92 ilustra a captura dos contornos móveis com a abordagem proposta e compara com resultados obtidos pelo PFEM baseado em velocidades de (Cerquagliaa *et al.*, 2019). Cerquagliaa *et al.* (2019) utilizam uma abordagem lagrangiana do PFEM clássico para o fluido e

o MEF desenvolvido para grandes deformações para o sólido. Para a interação fluido-estrutura os autores utilizam uma técnica de acoplamento particionado e, para evitarem efeitos de massas adicionadas, aplicam uma técnica de *Interface Quasi-Newton Inverse Least Squares* (IQN-ILS), algo que não é necessário na abordagem proposta neste trabalho, pois o acoplamento é feito de forma monolítica.

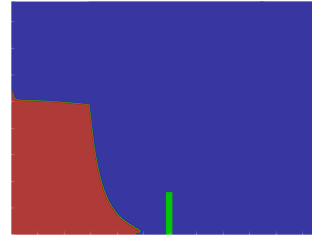
A Figura 93 apresenta as distribuições de massa específica e os campos de deslocamentos, onde os resultados são comparados com a solução numérica de Walhorn *et al.* (2005), que utilizam um acoplamento monolítico para a IFE e o Método dos Elementos Finitos espaço-tempo em conjunto com uma técnica implícita do *level-set* para capturar a posição da interface fluido-fluido e distinguir os dois domínios fluidos. Nota-se que apesar de eficiente e precisa para representar o comportamento global do escoamento, a técnica *level-set* da forma apresentada para mudanças topológicas leva a uma interface fluido-fluido suavizada e acaba por desprezar o desprendimento de partículas ou a formação de múltiplas interfaces.

Portanto, observa-se que a abordagem proposta permite a captura do bolsão de ar e apresenta bons resultados para a modelagem da Interação Fluido-Estrutura considerando um escoamento bifásico com mudança topológica, mesmo na presença de uma grande diferença de massa específica. Destaca-se a capacidade da abordagem baseada em partículas de representar os pequenos desprendimentos de partículas e múltiplas interfaces no escoamento multifásico.

Figura 92 – Ruptura de barragem sobre anteparo elástico: comparação com Cerquagliaa *et al.* (2019) (monofásico PFEM clássico).



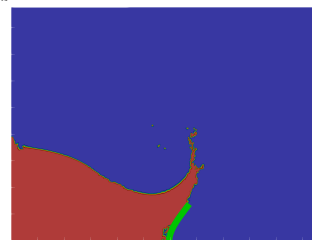
(a) Tempo: 0,1 s (Cerquagliaa *et al.*, 2019).



(b) Tempo: 0,1 s (Autor).



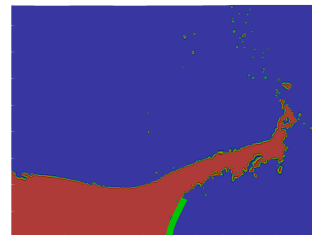
(c) Tempo: 0,2 s (Cerquagliaa *et al.*, 2019).



(d) Tempo: 0,2 s (Autor).



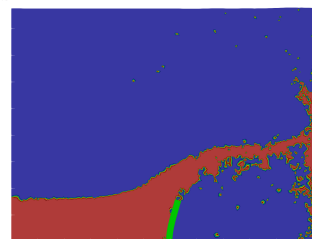
(e) Tempo: 0,3 s (Cerquagliaa *et al.*, 2019).



(f) Tempo: 0,3 s (Autor).



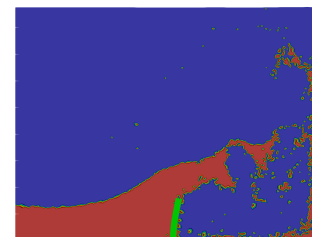
(g) Tempo: 0,4 s (Cerquagliaa *et al.*, 2019).



(h) Tempo: 0,4 s (Autor).



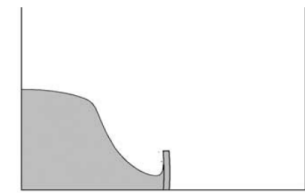
(i) Tempo: 0,5 s (Cerquagliaa *et al.*, 2019).



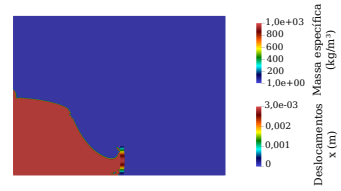
(j) Tempo: 0,5 s (Autor).

Fonte: Autoria Própria.

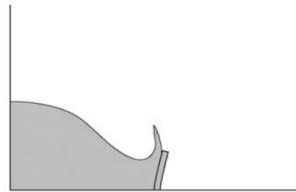
Figura 93 – Ruptura de barragem sobre anteparo elástico: comparação com Walhorn *et al.* (2005) (MEF espaço-tempo e *level-set*).



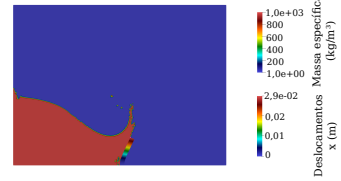
(a) Tempo: 0,15 s (Walhorn *et al.*, 2005).



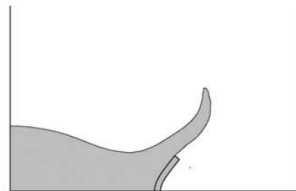
(b) Tempo: 0,15 s (Autor).



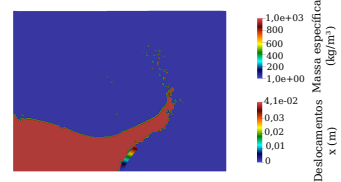
(c) Tempo: 0,185 s (Walhorn *et al.*, 2005).



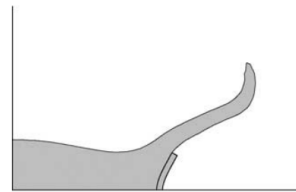
(d) Tempo: 0,185 s (Autor).



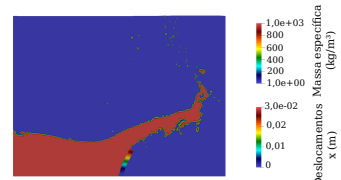
(e) Tempo: 0,250 s (Walhorn *et al.*, 2005).



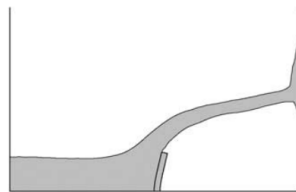
(f) Tempo: 0,250 s (Autor).



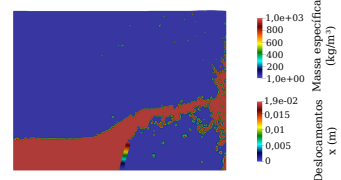
(g) Tempo: 0,300 s (Walhorn *et al.*, 2005).



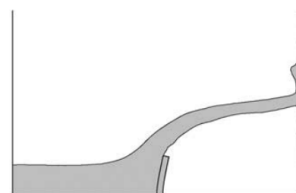
(h) Tempo: 0,300 s (Autor).



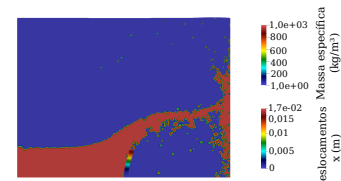
(i) Tempo: 0,375 s (Walhorn *et al.*, 2005).



(j) Tempo: 0,375 s (Autor).



(k) Tempo: 0,400 s (Walhorn *et al.*, 2005).



(l) Tempo: 0,400 s (Autor).

Fonte: Autoria Própria.



## Capítulo 9

### Conclusão

O objetivo deste trabalho de mestrado foi desenvolver e implementar uma técnica alternativa para a análise de escoamentos multifásicos com mudanças topológicas no domínio do fluido e Interação Fluido-Estrutura (IFE), empregando o Método dos Elementos Finitos e Partículas (PFEM) em uma abordagem baseada nas posições das partículas.

Inicialmente foi desenvolvido um programa para análise dinâmica de sólidos com grandes deslocamentos seguindo a abordagem posicional do Método dos Elementos Finitos, introduzida por Coda (2003), no entanto, utilizando-se o integrador  $\alpha$ -generalizado em vez do integrador de Newmark- $\beta$ , tradicionalmente utilizado na formulação posicional. Esse programa foi verificado através de exemplos selecionados, sendo esses os problemas estáticos de uma chapa com furo e de um arco com força distribuída. Os problemas dinâmicos foram de uma viga com grandes deslocamentos e carregamento dinâmico; e de uma viga com amortecimento viscoso. De maneira complementar e original também se apresenta a implementação do acoplamento do de elementos finitos sólidos bidimensionais com molas de giro, permitindo a análise de conexões sólido-mola rotacional, bem como a simulação aproximada de problemas tridimensionais assimétricos, como de uma viga conectada a uma chapa. A metodologia para isso consiste na consideração da energia de distorção, externa ao plano de análise, no funcional de energia mecânica do problema. Esse modelo resulta em um acoplamento monolítico das molas de giro com elementos sólidos.

No âmbito da Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD), parte-se de uma formulação baseada em posições do Método dos Elementos Finitos e Partículas aplicável a fluidos newtonianos incompressíveis. Essa formulação foi desenvolvida e implementada no grupo de pesquisa por Avancini e Sanches, conforme Avancini (2023), Avancini *et al.* (2024), e também empregada por Moreira (2021). A base para isso foi a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) em descrição lagrangiana total baseada em posições, aplicada a escoamentos incompressíveis de superfície livre com deformações finitas, desenvolvida em Avancini e Sanches (2020). A plataforma computacional do grupo de pesquisa foi utilizada como base para o desenvolvimento das implementações e simulações do presente trabalho tanto em Dinâmica dos

Fluidos Computacional quanto em Interação Fluido-Estrutura.

Nesse contexto, foram propostas técnicas adicionais de remalhamento para o tratamento de escoamentos multifásicos com mudanças topológicas e múltiplas interfaces. Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, introduz-se uma metodologia para a análise de escoamentos multifásicos com distorções indefinidas empregando a formulação do PFEM baseada em posições. A abordagem proposta permite generalizar o PFEM, por meio de uma técnica de remalhamento multidomínio, onde o controle de qualidade de malha e realocação é realizado individualmente em cada domínio de fluido diferente. Essa abordagem é capaz de capturar múltiplas interfaces e permite a análise monolítica de escoamentos com contato entre interfaces fluido-fluido de diferentes fluidos. A metodologia proposta é testada por meio de exemplos numéricos da literatura e validada com resultados experimentais. A eficiência do modelo numérico para escoamentos multifásicos é demonstrada por meio dos seguintes exemplos: análise de decantação bifásica e multifásica; rompimento de barragem de água considerando o ar; rompimento de barragem com obstáculo rígido e formação de bolsão de ar; *sloshing* de um fluido viscoso em um tanque com a consideração do ar. Outras aplicações resultantes do modelo multifásico desenvolvido foram: análise de escoamentos de superfície livre pelo PFEM, flexibilizando a influência do parâmetro arbitrário  $\alpha$ -*shape* na captura da interface fluido-ar; captura dinâmica e automática de interfaces fluido-fluido complexas e de formação de bolhas.

A fim de tornar o modelo mais geral e ampliar os tipos de aplicações, também desenvolvem-se técnicas adicionais de remalhamento para o tratamento de escoamentos em domínios abertos no contexto da descrição lagrangiana. São implementadas técnicas para considerar contornos espacialmente fixos de entrada e saída, algo não trivial no contexto de formulações lagrangianas, pois o domínio deforma-se continuamente para acompanhar o escoamento. Assim, a técnica implementada no contexto do PFEM recupera a geometria inicial a cada passo de tempo, por meio da realocação de determinadas partículas. Isso permite a aplicação de condições de contorno tipicamente eulerianas, como entrada e saída contínuas, mesmo em formulações lagrangianas. Além disso, uma técnica para o tratamento de condições de deslizamento é proposta, pois no contexto do PFEM clássico a aplicação direta de deslizamento pode resultar em vazamentos artificiais impróprios devido ao uso do critério geométrico  $\alpha$ -*shape* e à formação de grandes elementos. Nesse sentido, uma abordagem de realocação de partículas é proposta para manter a representação adequada das paredes com condição de deslizamento. A fim de verificar essas técnicas propostas são apresentados exemplos numéricos com condições de contorno espacialmente fixas: escoamento em dutos; escoamento de Couette; escoamento de Poiseuille; cavidade quadrada; e escoamento ao redor de um cilindro. Nota-se que esse conjunto de implementações permitiu ampliar bastante a gama de aplicações do PFEM baseado em posições.

Por fim, apresenta-se a abordagem utilizada para o acoplamento fluido estrutura. O acoplamento é apresentado de maneira monolítica entre a formulação do PFEM para fluidos com o MEF posicional de sólidos deformáveis, conforme introduzido por Avancini (2023).

Essa formulação é estendida para a análise de Interação Fluido-Estrutura com escoamentos multifásicos. Nesse caso, a metodologia para detecção do contato entre fluido e sólido foi incrementada para que as partículas de interface sólido-fluido possam assumir as propriedades do fluido mais próximo. Além disso, foi necessário incrementar a técnica tradicional de contato do PFEM a fim de monitorar e tratar o contato de fluido-estrutura no contexto de escoamentos multifásicos com domínio totalmente preenchido. Além disso, são implementadas e testadas as novas condições de contorno de domínio aberto (contornos espacialmente fixos e deslizamento) no âmbito da IFE. A abordagem proposta tem a sua eficiência demonstrada com exemplos numéricos da literatura: reservatório bifásico com parede flexível em pequenos deslocamentos e com formação de onda; e o problema de rompimento de barragem com obstáculo deformável, considerando a presença do ar e a captura do bolsão de ar.

Conclui-se, portanto, que a metodologia proposta é capaz de capturar a dinâmica de escoamentos multifásicos com mudanças topológicas e múltiplas interfaces, tanto no contexto de domínios abertos/fechados quanto no contexto da Interação Fluido-Estrutura.

## 9.1 Desenvolvimentos futuros

Como sugestão para desenvolvimentos futuros apresenta-se:

a) Generalização do tratamento das condições LBB no PFEM: em geral o PFEM é limitado ao MEF com funções de forma lineares tanto para posição, velocidade ou deslocamento, como para pressão, o que, no caso de escoamentos incompressíveis, demanda estabilização da pressão. Nota-se que a simples aplicação do modelo estabilizado desenvolvido para escoamentos monofásicos newtonianos pode representar dificuldades adicionais na modelagem de escoamentos multifásicos ou não-newtonianos (dificuldades advindas por exemplo da interpolação dos materiais na interface fluido-fluido). Nesse sentido, sugere-se a investigação por elementos estáveis que sejam compatíveis com o PFEM e de diferentes modelos de estabilização do campo de pressão que possam ser mais eficientes, especialmente em problemas com fortes gradientes de massa específica (multifásicos) ou escoamentos não-newtonianos.

b) Acoplamento entre as descrições euleriana e lagrangiana ou ALE e lagrangiana, considerando o PFEM: o desenvolvimento das técnicas de realocação de partículas para aplicação de condições de contorno espacialmente fixas, como entrada, saída e deslizamento, facilitam o acoplamento do PFEM com o método dos elementos finitos em descrição euleriana ou ALE. Nesse sentido, tais acoplamentos são caminhos naturais das implementações realizadas neste trabalho e podem ser úteis para problemas que apresentem mudanças topológicas apenas localmente.

c) Aplicação do PFEM baseado em posição para sólidos: atualmente o grupo de pesquisa desenvolveu um grande arcabouço de aplicações do PFEM em dinâmica dos fluidos, contudo em dinâmica dos sólidos ainda há um grande espaço para explorar o desempenho desse método no

contexto da mecânica dos sólidos deformáveis para problemas envolvendo fratura, escavações ou materiais particulados.

d) Análise multifásica incluindo fluidos não-newtonianos: o presente trabalho se limitou à análise de fluidos newtonianos, contudo a técnica de remalhamento por domínio apresenta potencial de aplicação no contexto de misturas de fluidos newtonianos e não-newtonianos ou entre diferentes fluidos não-newtonianos.

e) Análise multifásica considerando o MEF espaço-tempo em abordagem baseada em posições: o MEF espaço-tempo com malha não estruturada no tempo tem o potencial de permitir o remalhamento de maneira mais precisa, facilitando a modelagem de escoamentos com mudanças topológicas. Nesse caso destacam-se duas possibilidades: o desenvolvimento de técnica MEF espaço-tempo própria para problemas com mudanças topológicas, ou aplicação da formulação espaço-tempo no contexto do PFEM.

f) Análise térmica multifásica: a técnica desenvolvida para remalhamento multidomínio no PFEM facilita a análise térmica multifásica, quando pode haver variação considerável da massa específica do fluido, gerando gradientes de velocidade. O acoplamento de um programa térmico com o código desenvolvido pode permitir a análise de fluxos gerados por aquecimento.

g) Escoamentos multifásicos compressíveis com PFEM: as análises desenvolvidas no presente trabalho se limitam a escoamentos incompressíveis, nesse sentido o estudo das técnicas implementadas para escoamentos multifásicos podem servir de base para futuras implementações multifásicas no contexto de escoamentos compressíveis.

h) Mudança de fase: após o acoplamento multifásico e análise térmica, o tratamento da mudança de fase líquida para gasosa pode estar facilitado, bastando considerar os pontos de transição das leis constitutivas.

## Referências

ARGYRIS, J.; DUNNE, P.; SCHARPF, D. On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 14, n. 3, p. 401–451, 1978.

ARGYRIS, J. H. Three-dimensional anisotropic and inhomogeneous elastic media matrix analysis for small and large displacements. **Ing. Arch**, v. 34, p. 33–55, Jan 1965.

AUBRY, R.; IDELSOHN, S.; ONATE, E. Fractional step-like schemes for free surface problems with thermal coupling using the lagrangian pfem. **Computational Mechanics**, v. 38, n. 4-5, p. 294–309, 2006.

AULISA, E.; BNÀ, S.; BORNIA, G. A monolithic ale newton-krylov solver with multigrid-richardson-schwarz preconditioning for incompressible fluid-structure interaction. **Computers and Fluids**, v. 174, p. 213–228, 2018.

AVANCINI, G. **Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura: Uma formulação posicional baseada em elementos finitos e partículas**. 2018. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

AVANCINI, G. **Formulação unificada para análise tridimensional de interação fluido-estrutura com escoamento de superfície livre: Uma abordagem Lagrangiana baseada em posições**. 2023. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

AVANCINI, G.; FERNANDES, J.; SANCHES, R. A. K. Método dos elementos finitos posicional e método de partículas combinados para análise bidimensional de escoamentos incompressíveis. In: **XXXVIII Iberian-Latin American Congress On Computational Methods In Engineering**. [S.l.: s.n.], 2017.

AVANCINI, G. *et al.* A particle-position-based finite element formulation for free-surface flows with topological changes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 429, Sep 2024.

AVANCINI, G.; SANCHES, R. A. K. A total lagrangian position-based finite element formulation for free-surface incompressible flows. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 169, 2020.

BABUŠKA, I. The finite element method with lagrangian multipliers. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 20, n. 3, p. 179–192, 1973.

- BABUŠKA, I.; NARASIMHAN, R. The babuška-brezzi condition and the patch test: an example. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 140, n. 1-2, p. 183–199, 1977.
- BABUŠKA, I.; NARASIMHAN, R. The babuška-brezzi condition and the patch test: an example. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 140, p. 183–199, 1997.
- BAKER, T. Automatic mesh generation for complex three-dimensional regions using a constrained delaunay triangulation. **Eng. with Computers**, Springer, v. 5, p. 161–175, 1989.
- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- BATHE, K. J.; DVORKIN, E. N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 17, n. 5-6, p. 871–879, 1983.
- BATHE, K.-J. *et al.* Inf–sup testing of upwind methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 48, n. 5, p. 745–760, 2000.
- BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. **Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications**. [S.l.]: Wiley, 2013. (Wiley Series in Computational Mechanics). ISBN 9781118483572.
- BETSCH, P.; MENZEL, A.; STEIN, E. On the parametrization of finite rotations in computational mechanics: a classification of concepts with application to smooth shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 155, n. 3-4, p. 273–305, 1998.
- BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.
- BRENDEL, B.; RAMM, E. Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells. **Computers & structures**, Elsevier, Stuttgart, Germany, v. 12, n. 4, p. 549–558, 1980.
- BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. **Publications mathématiques et informatique de Rennes**, p. 1–26, 1974.
- BROWN, T. *et al.* **Chemistry: the central science**. 12. ed. [S.l.]: Pearson, 2012.
- CAMPELLO, E.; PIMENTA, P.; WRIGGERS, P. A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation. **Computational Mechanics**, Springer, v. 31, n. 6, p. 505–518, 2003.
- CARVALHO, P. R. P. **Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato**. 2019. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- CARVALHO, P. R. P.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. Positional finite element formulation for two-dimensional analysis of elasto-plastic solids with contact applied to cold forming processes simulation. **J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.**, v. 42, p. 245, 2020.

\_\_\_\_\_. A large strain thermodynamically-based viscoelastic-viscoplastic model with application to finite element analysis of polytetrafluoroethylene (ptfe). **European Journal of Mechanics - A/Solids**, 2023.

CERQUAGLIA, M. L. *et al.* The particle finite element method for the numerical simulation of bird strike. **International journal of impact engineering**, Elsevier, v. 109, p. 1–13, 2017.

CERQUAGLIA, M. *et al.* A fully partitioned lagrangian framework for fsi problems characterized by free surfaces, large solid deformations and displacements, and strong added-mass effects. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, Elsevier, v. 348, n. 409-442, 2019.

CHEN, L.; XU, J. C. Optimal delaunay triangulations. **Journal of Computational Mathematics**, v. 22, n. 2, p. 299–308, 2004.

CHIANG, C. Y. *et al.* Numerical study of a 3d eulerian monolithic formulation for incompressible fluid-structures systems. **Fluids**, MDPI, 2017.

CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized-alpha method. **Journal of Applied Mechanics**, 1993.

CHUNG, T. J. **Computational Fluid Dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.

CODA, H. B. **O Método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica**. [S.l.]: EESC/USP, São Carlos, 2018.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical problems in engineering**, v. 2009, 2009.

CRISFIELD, M. A. An arc-length method including line searches and accelerations. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 19, n. 9, p. 1269–1289, 1983.

\_\_\_\_\_. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 81, n. 2, p. 131–150, 1990.

\_\_\_\_\_. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Volume 1**. United Kingdom: John Wiley and Sons, 1996.

CRUZ, C.; MIRANDA, E. Evaluation of the rayleigh damping model for buildings. **Engineering Structures**, 2017.

CRUZ, J. S. **Modelo vazão-velocidade para avaliação de potencial hidrocínético**. 2018. Dissertação (Mestrado) — Recursos Hídricos e Saneamento, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, 2018.

DELCOUR, L. *et al.* Investigating the influence of compressibility on the second mode flutter instability of a clamped-free cylinder in axial flow using fluid-structure interaction simulations with the chimera technique. **J. Fluids and Structures**, Elsevier, v. 109, p. 103469, 2022.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J.-P. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.

DUNN, T. **A Cell-Centered Multiphase ALE Scheme With Structural Coupling**. [S.l.]: Lawrence Livermore National Security, Department of Energy, Estados Unidos, 2012.

EDELSBRUNNER, H. Weighted alpha shapes. **University of Illinois at Urbana-Champaign**, 1992.

EDELSBRUNNER, H.; MÜCKE, E. Three-dimensional alpha shapes. **ACM Transactions on Graphics (TOG)**, v. 13, n. 1, p. 43–72, 1994.

EDELSBRUNNER, H.; TAN, T. S. An upper bound for conforming delaunay triangulations. **Discrete & Computational Geometry**, Springer, v. 10, n. 2, p. 197–213, 1993.

FANGQI, Z.; ANFENG, S.; XIAOHONG, W. An efficient finite difference model for multiphase flow in fractured reservoirs. **PETROLEUM EXPLORATION AND DEVELOPMENT**, Elsevier, v. 41, p. 262–266, 2014.

FELIPPA, C. A.; HAUGEN, B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. theory. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 194, n. 21-24, p. 2285–2335, 2005.

FERNANDES, J. W. D. **Interação Fluido-Estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o Método dos Elementos Finitos**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

FERNANDES, J. W. D. **Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura**. 2020. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. Ale incompressible fluid-shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. **Computational Mechanics**, Springer, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.

FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. 2nd. ed. Berlin: Springer, 1999.

FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos**. São Paulo: Edusp, 2012.

FRANCI, A. **Unified Lagrangian formulation for fluid and solid mechanics, fluid-structure interaction and coupled thermal problems using the PFEM**. [S.l.]: Springer, 2016.

FRANCI, A.; OÑATE, E.; CARBONELL, J. Unified lagrangian formulation for solid and fluid mechanics and fsi problems. **Comput. Method. in App. Mech. and Eng.**, Elsevier, v. 298, p. 520–547, 2016.

FREY, P.; BOROUCAKI, H.; GEORGE, P. Delaunay tetrahedralization using an advancing-front approach. **5th International Meshing Roundtable**, p. 31–48, 1996.

FU, C.; CREMONESI, M.; PEREGO, U. A hybrid lagrangian–eulerian particle finite element method for free-surface and fluid–structure interaction problems. **Int. J. Numer. Met. Eng.**, Wiley, 2023.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. **J. of computational physics**, Elsevier, v. 48, p. 387–411, 1982.

GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. **Monthly notices of the royal astronomical society**, Oxford University Press Oxford, UK, v. 181, n. 3, p. 375–389, 1977.

GOMES, H. C. **Método dos Elementos Finitos com Fronteiras Imersas aplicado a Problemas de Dinâmica dos Fluidos e Interação Fluido-Estrutura**. 2013. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

GRECO, M. **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. 2004. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

GRECO, M.; CODA, H. B. Positional fem formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 290, n. 3-5, p. 1141–1174, 2006.

GRECO, M. *et al.* Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 2006.

HAJIBEYGI, H.; JENNY, P. Multiscale finite-volume method for parabolic problems arising from compressible multiphase flow in porous media. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 228, p. 5129–5147, 2009.

HAYASHI, E. Y. **Uma formulação baseada na decomposição de Flory para análise termomecânica de sólidos termo-visco-elasto-plásticos**. 2024. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

HIRT, C.; NICHOLS, B. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. **Journal of computational physics**, v. 39, n. 1, p. 201–225, 1981.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear Solid Mechanics**. England: John Wiley and Sons, 2000.

HUBER, R.; HELMIG, R. Node-centered finite volume discretizations for the numerical simulation of multiphase flow in heterogeneous porous media. **Computational Geosciences**, Baltzer Science Publishers BV, v. 4, p. 141–164, 2000.

HUBNER, B.; WALHORN, E.; DINKLER, D. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, 2004.

HUGHES, T. J.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. three-dimensional shells. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981.

IDELSOHN, S. *et al.* Analysis of multifluid flows with large time steps using the particle finite element method. **Inter. J. Num. Meth. Fluids**, Wiley, v. 75, p. 621–644, 2014.

- \_\_\_\_\_. Interaction between an elastic structure and free-surface flows: experimental versus numerical comparisons using the pfem. **Computational Mechanics**, Springer, v. 43, n. 1, p. 125–132, 2008.
- IDELSOHN, S.; TORRECILLA, M.; OñATE, E. Multi-fluid flows with the particle finite element method. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, Elsevier, v. 198, p. 2750–2767, 2009.
- IDELSOHN, S. R.; ONATE, E.; PIN, F. D. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 61, n. 7, p. 964–989, 2004.
- JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A generalized- $\alpha$  method for integrating the filtered navier–stokes equations with a stabilized finite element method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 190, n. 3-4, p. 305–319, 2000.
- JENNY, P.; LEE, S.; TCHELEPI, H. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media. **Journal on Multiscale Modeling and Simulation**, v. 3, p. 50–64, 2004.
- \_\_\_\_\_. Adaptive fully implicit multi-scale finite-volume method for multi-phase flow and transport in heterogeneous porous media. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 217, p. 627–641, 2006.
- JOUBERT, J.; WILKE, D.; PIZETTE, P. A generalized finite difference scheme for multiphase flow. **Mat. and Comput. Appl.**, MDPI, 2023.
- KISHINO, R. T. **Uso da decomposição multiplicativa de Flory na análise de sólidos viscoelastoplásticos e fluidos altamente viscosos**. 2022. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.
- KISHINO, V. H. **Estabilidade de elementos estruturais de parede fina após conformação a frio: uma estratégia elasto-plástica baseada na decomposição de Flory**. 2022. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.
- KONDO, M.; KOSHIZUKA, S. Improvement of stability in moving particle semi-implicit method. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 65, n. 6, p. 638–654, 2011.
- KOSHIZUKA, S.; OKA, Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. **Nuclear science and engineering**, Taylor and Francis, v. 123, n. 3, p. 421–434, 1996.
- KOSHIZUKA, S.; TAMAKO, H.; OKA, Y. A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation. **Comput. Fluid Dyn.**, v. 4, p. 29, 1995.
- LARESE, A. A lagrangian pfem approach for non-newtonian viscoplastic materials. **Revista Inter. de Mét. Num. para Cál. y Diseño en Ingeniería**, p. 307–317, 2017.
- LARESE, A. *et al.* Validation of the particle finite element method (pfem) for simulation of free surface flows. **Engineering Computations**, Elsevier, v. 25, n. 4, p. 385–425, 2008.

- LIU, W. *et al.* A high-performance open-source solution for multiphase fluid-structure interaction. **International Journal of Offshore and Polar Engineering**, The International Society of Offshore and Polar Engineers, v. 32, n. 1, p. 24–30, 2022.
- LIUA, X.; ZHANG, S. Development of adaptive multi-resolution mps method for multiphase flow simulation. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, Elsevier, v. 387, p. 114184, 2021.
- LOPES, W. C. **Formulação espaço-tempo do método dos elementos finitos para problemas dinâmicos de elasticidade bidimensional com grandes deslocamentos**. 2023. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.
- LOW, K. *et al.* A parameter-free total lagrangian smooth particle hydrodynamics algorithm applied to problems with free surfaces. **Comp. Part. Mech.**, Springer, v. 8, p. 859–892, 2021.
- LOZOVSKIY, A.; OLSHANSKII, M. A.; VASSILEVSKI, Y. V. Analysis and assessment of a monolithic fsi finite element method. **Computers and Fluids**, v. 179, p. 277–288, 2019.
- LUNATI, I.; JENNY, P. Multiscale finite-volume method for compressible multiphase flow in porous media. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 216, p. 616–636, 2006.
- MACIEL, D.; CODA, H. B. **Positional description for nonlinear 2-d static and dynamic frame analysis by fem with Reissner kinematics**. 2005. Tese (Doutorado), 2005.
- MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2008.
- MARTIN, J.; MOYCE, W. Part iv. an experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *philosophical transactions of the royal society of london*. **Mathematical and Physical Sciences, Series A**, The Royal Society London, v. 244, n. 882, p. 312–324, 1952.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física, 2002.
- MOREIRA, D. H. F. R. **Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura com contato estrutural**. 2021. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.
- MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. **The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics**. Switzerland: Springer, 2016.
- NAVARRO, C.; HITSCHFELD, N.; SCHEIHING, E. Quasi-delaunay triangulations using gpu-based edge-flips. **Computer Vision, Im. and Computer Graphics - Theory and Appl.**, p. 36–49, 2014.
- NIKITIN, K.; TEREKHOV, K.; VASSILEVSKI, Y. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations and multiphase flows. **Comput Geosci**, Springer, v. 18, p. 311–324, 2014.
- OGDEN, R. W. **Non-Linear Elastic Deformations**. Mineola, New York: John Wiley & Sons and Dover Publications, 1997.
- OLIVER, J. *et al.* Particle finite element methods in solid mechanics problems. **Computational plasticity**, p. 87–103, 2007.

- OWEN, H. C. **A finite element model for free surface and two fluid flows on fixed meshes**. 2009. Tese (Doutorado), 2009.
- OÑATE, E.; CARBONELL, J. M. Updated lagrangian mixed finite element formulation for quasi and fully incompressible fluids. **Comput Mech**, Springer, 2014.
- PACCOLA, R. **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF**. 2004. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- PASCON, J. P. **Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional**. 2008. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- PASCON, J. P. **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica**. 2012. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- PAULTRE, P. **Dynamics of Structures**. USA: Wiley-Iste, 2013.
- PIMENTA, P.; CAMPELLO, E.; WRIGGERS, P. A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element. **Computational Mechanics**, v. 34, n. 3, p. 181–193, 2004.
- \_\_\_\_\_. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational dofs and general hyperelasticity. part 1: Rods. **Computational Mechanics**, v. 42, n. 5, p. 715–732, 2008.
- PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B. Shell curvature as an initial deformation: a geometrically exact finite element approach. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 78, n. 9, p. 1094–1112, 2009.
- PITERI, M. A. *et al.* TriangulaÇÃO de delaunay e o princípio de inserÇÃO randomizado. **II Simpósio Brasileiro de Geomática**, V Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, p. 655–663, 2007.
- PORTO, R. M. **Hidráulica Básica**. 4. ed. São Carlos: EESC USP, 2006.
- RABELLO, G. *et al.* An ale finite element method for the simulation of 3d multiphase flows. In: **12th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences**. [S.l.: s.n.], 2008.
- REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. **The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**. [S.l.]: CRC press, 2010.
- RIZZIERI, G.; FERRARA, L.; CREMONESI, M. Numerical simulation of the extrusion and layer deposition processes in 3d concrete printing with the particle finite element method. **Comp. Mech.**, Springer, v. 73, p. 277–295, 2024.
- ROSA, R. J. R. **Técnica de partição de domínio para análise numérica de sólidos bidimensionais fraturados combinando análise isogeométrica e elementos finitos**. 2021. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

- RUSSELL, J. B. **Química Geral**. 2. ed. [S.l.]: Pearson Universidades, 1994. v. 1.
- RYZHAKOV, P. *et al.* A monolithic lagrangian approach for fluid-structure interaction problems. **Comput. Mech.**, Springer, 2010.
- SAMPAIO, P. D. *et al.* Petrov-galerkin solutions of the incompressible navier-stokes equations in primitive variables with adaptive remeshing. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 106, n. 1-2, p. 143–178, 1993.
- SANCHES, R. A. K. **Análise bidimensional de interação fluido-estrutura: Desenvolvimento de código computacional**. 2006. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- SANCHES, R. A. K. **Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o Método dos Elementos Finitos**. 2011. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- SANCHES, R. A. K. **Métodos numéricos para interação fluido-estrutura**. São Carlos: [s.n.], 2022.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to fluid structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 259, p. 177–196, 2013.
- \_\_\_\_\_. On fluid-shell coupling using an arbitrary lagrangian-eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. **Applied Mathematical Modelling**, v. 38, n. 14, p. 3401–3418, 2014.
- SAYED, M. *et al.* Aeroelastic analysis of 10 mw wind turbine using cfd–csd explicit fsi-coupling approach. **Journal of Fluids and Structures**, Elsevier, v. 87, p. 354–377, 2019.
- SCHULZ, H. E. **O essencial em fenômenos de transporte**. [S.l.]: Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 2003.
- SHAKIBAEINIA, A.; JIN, Y. Mps mesh-free particle method for multiphase flows. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, Elsevier, p. 13–26, 2012.
- SHEWCHUK, J. R. Triangle: Engineering a 2d quality mesh generator and delaunay triangulator. **Workshop on Applied Computational Geometry**, p. 203–222, 1996.
- SI, H. Constrained delaunay tetrahedral mesh generation and refinement. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 46, p. 33–46, 2010.
- \_\_\_\_\_. Tetgen, a delaunay-based quality tetrahedral mesh generator. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, v. 41, n. 2, p. 1–36, 2015.
- SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. i: Formulation and optimal parametrization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 72, n. 3, p. 267–304, 1989.
- SIQUEIRA, T. M. **Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional**. 2019. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

- SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. Total lagrangian fem formulation for nonlinear dynamics of sliding connections in viscoelastic plane structures and mechanisms. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 129, p. 63–77, 2017.
- SUAREZ, S. A. P. **Análise numérica de barras gerais 3D sob efeitos mecânicos de explosões e ondas de choque**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- SUSSMAN, M. *et al.* An improved level set method for incompressible two-phase flows. **Computers & Fluids**, Elsevier, v. 27, n. 5-6, p. 663–680, 1998.
- TANG, T. Moving mesh methods for computational fluid dynamics. **Contemporary mathematics**, v. 383, n. 8, p. 141–173, 2005.
- TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. **Advances in applied mechanics**, Elsevier, v. 28, p. 1–44, 1991.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain space-time procedure: Ii, computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. **Comp. Met. Appl. Mech. Eng.**, Elsevier, v. 94, p. 353–371, 1992.
- TEZDUYAR, T. E. *et al.* Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, 1992.
- \_\_\_\_\_. Computation of unsteady incompressible flows with the stabilized finite element methods: Space-time formulations, iterative strategies and massively parallel implementation. **New Methods in Transient Analysis**, ASME, 1992.
- TIAN, B.; LI, L. A five-equation model based global ale method for compressible multifluid and multiphase flows. **Computers and Fluids**, Elsevier, v. 214, p. 104756, 2021.
- TORNBERG, A.; ENGQUIST, B. A finite element based level-set method for multiphase flow applications. **Comput Visual Sci**, Springer, v. 3, p. 93–101, 2000.
- TORRECILLA, M. **Numerical Simulation of multi-fluid flows with the particle finite element method**. 2010. Tese (Doutorado) — PhD Program in Structural Analysis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espanha, 2010.
- VIERENDEELS, J. *et al.* Implicit coupling of partitioned fluid–structure interaction problems with reduced order models. **Comp. and Struct.**, Elsevier, v. 85, p. 970–976, 2007.
- WALHORN, E. *et al.* Fluid-structure coupling within a monolithic model involving free surface flows. **Comput. and Struc.**, Elsevier, 2005.
- WARBURTON, G. B. **The Dynamical Behaviour of Structures**. 2. ed. England: Elsevier, 1976.
- WEN, X.; ZHAO, W.; WAN, D. A multiphase mps method for bubbly flows with complex interfaces. **Ocean Engineering**, Elsevier, v. 238, p. 109743, 2021.
- YANG, P. *et al.* Modelling of fluid–structure interaction with multiphase viscous flows using an immersed-body method. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 321, p. 571–592, 2016.

- YOKOMIZO, M. H. **Análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura com vorticidade**. 2024. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.
- ZHANG, C. *et al.* An efficient and generalized solid boundary condition for sph: Applications to multi-phase flow and fluid–structure interaction. **European Journal of Mechanics - B Fluids**, Elsevier, v. 94, p. 276–292, 2022.
- ZHANG, N.; ABUSHAIKHA, A. An efficient mimetic finite difference method for multiphase flow in fractured reservoirs. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. **SPE Europec featured at 81st EAGE Conference and Exhibition held in London, England, UK**. [S.l.], 2019.
- ZHANG, Y. *et al.* A multi-phase sph model for simulating the floating owc-breakwater integrated systems. **Coastal Engineering**, Elsevier, v. 197, p. 104658, 2025.
- ZHAO, H. *et al.* A variational level set approach to multiphase motion. **JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS**, Academic Press, v. 127, p. 179–195, 1996.
- ZHENG, B.; CHEN, Z. A multiphase smoothed particle hydrodynamics model with lower numerical diffusion. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 382, p. 177201, 2019.
- ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Fluid Mechanics: fundamentals and applications**. 3. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2013.

